EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

17e JAARGANG 1940

Nr. 1

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—.
Voor intekenaars op het Nieuw
Tijdschrift v. Wiskunde f 5.—.

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6,—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6,—) zijn ingetekend, betalen *f* 5,—.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en Wimecos (Vereniging van leraren in de wiskunde, mechanica en de cosmographie aan H.B.S. 5-j. c. B, lycea en meisjes H.B.S. 5—6 j. c.) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van *f* 1,75 op de postgirorekening no. 8100 van Dr. C. de Jong te Leiden. De leden van Wimecos storten hun contributie van *f* 2,75 (waarin de abonnementskosten op Euclides begrepen zijn) op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de Firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen *f* 5,— per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

Dr C. DE JONG, L.i.W.e.N.a.G.e.L. 1
Dr J. SPIJKERBOER, Wimecos 1
Officiële mededelingen van Wimecos 2
Dr E. J. DIJKSTERHUIS, Archimedes 8
Dr. E. W. BETH, De rekenkundige denkbaarheden in logische samenhang 41
Boekbesprekingen 47
Prof. Dr J. G. VAN DER CORPUT, Goniometrische functies gekarakteriseerd door een functionaalbetrekking 55

L. i. W. e. N. a. G. e. L.

Nu het tijdschrift „Euclides" het officiële orgaan is geworden van de groep Leraren in Wiskunde en Natuurwetenschappen van het Genootschap van Leraren aan Nederlandse Gymnasiën gevoel ik mij gedrongen, uiting te geven aan een gevoel van erkentelijkheid jegens de firma Noordhoff, die dit door haar tegemoetkomende houding heeft mogelijk gemaakt. Ik spreek de hoop uit, dat alle docenten in de wis- en natuurkundige vakken zich via de groep als abonné zullen opgeven; ik nodig hen, die het tijdschrift reeds ontvangen, uit, hun collega's tot toetreding op te wekken.

C. de Jong,
Voorzitter Liw.

WIMECOS.

In dit nummer verschijnt Euclides voor de eerste maal als officieel orgaan van Liwenagel en Wimecos!

Dat is voor mij aanleiding om namens de Vereeniging van Leeraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Cosmografie aan Hoogere Burgerscholen en Lycea een enkel woord te schrijven.

De uiting van den wensch van leden in een onzer jaarvergaderingen was *aanleiding* tot dit gebeuren (er is zaad!).

De samenwerking met Liwenagel leverde *mogelijkheid* er toe (de akker is gehuurd!).

Het doorzettingsvermogen van onzen Secretaris en de bereidwilligheid van den Heer Wijdenes brachten de *oplossing* (ploegen en eggen; de akker is toebereid!).

De beide Vereenigingen gaven haar *sanctie* (het zaad wordt uitgestrooid!).

Dit *is* de geschiedenis.

Nu zullen de leden hun gedachten over de didactiek en de methodiek der exacte vakken moeten weergeven in hun eigen orgaan (kiemproces en groei!).

En levende belangstelling en verdieping van het onderwijs kunnen de gevolgen zijn (oogst!).

Dat *zij* de toekomst.

Dr. J. Spijkerboer,
Voorzitter van „Wimecos".

OFFICIEELE MEDEDEELINGEN VAN WIMECOS.

In verband met de plaats gehad hebbende wijzigingen van de statuten en het huishoudelijk reglement van Wimecos en het feit, dat verschillende leden niet in het bezit hiervan zijn, volgt hier publicatie van beide. Terloops zij opgemerkt, dat het Bestuur verplicht was, om de oude spelling te handhaven, daar anders „binnen afzienbaren tijd" geen Koninklijke goedkeuring der gewijzigde Statuten was te verwachten, blijkens mededeeling van het Min. van Justitie.

VEREENIGING: Vereeniging van Leeraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Kosmographie aan Hoogere Burgerscholen met vijfjarigen cursus B, Lycea en Meisjes-Hoogere-Burgerscholen met 5-/6-jarigen cursus, thans genaamd: Vereeniging van Leeraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Cosmografie aan Hoogere Burgerscholen en Lycea, gevestigd te Amsterdam.
(Gewijzigde statuten).

Art. 1. De vereeniging heet: Vereeniging van Leeraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Cosmografie aan Hoogere Burgerscholen en Lycea, en is gevestigd te Amsterdam. Haar naam zal afgekort geschreven mogen worden als Wimecos.

Art. 2. De vereeniging is aangegaan voor een tijdvak van 29 jaren, te rekenen van den dag der oprichting, 13 December 1925.

Art. 3. Het doel der vereeniging is aan de leden gelegenheid te geven van gedachten te wisselen over alle onderwerpen, die betrekking hebben op het onderwijs in wiskunde, mechanica en cosmografie aan de in art. 1 genoemde scholen, en eventueel stappen te doen om tot verwezenlijking van de door de leden geuite wenschen, dat onderwijs betreffende, te komen.

Art. 4. De vereeniging tracht haar doel te bereiken langs wettigen weg, en wel:

1°. door vergaderingen van de leden;

2°. door het verspreiden van haar meeningen door middel van de pers;

3°. door het nemen van al die wettige maatregelen, die tot het bereiken van het doel wenschelijk geacht worden.

Art. 5. Er wordt jaarlijks ten minste één algemeene ledenvergadering gehouden.

Art. 6. Leden kunnen zijn leeraren of leeraressen in één of meer der in art. 1 genoemde vakken aan één of meer der in art. 1 genoemde scholen of aan daarmee gelijk te stellen onderwijsinrichtingen.

Door het bestuur kunnen ook tot lid worden toegelaten andere personen, op wier lidmaatschap in verband met het doel der vereeniging prijs wordt gesteld.

Art. 7. Om lid te worden, geeft men zich aan het bestuur op. Men houdt op lid te zijn door:

a. een schriftelijke kennisgeving aan het bestuur ten minste één maand vóór het eindigen van het vereenigingsjaar, welk laatste loopt van 1 September tot 31 Augustus;

b. royement, uitgesproken op een algemeene ledenvergadering met ten minste 2/3 der uitgebrachte geldige stemmen, als het voorstel tot royement op de agenda dezer vergadering voorkomt;

c. overlijden.

Art. 8. De leden betalen jaarlijks een bij huishoudelijk reglement vastgestelde contributie.

Art. 9. Het bestuur bestaat uit ten minste 3 leden, uit en door de leden gekozen. De taak, wijze van aftreden en verkiezing van het bestuur worden bij huishoudelijk reglement geregeld.

Art. 10. Het huishoudelijk reglement stelt de rechten en verplichtingen der leden nader vast. Het mag geen bepalingen bevatten, die in strijd met de statuten zijn.

Art. 11. Eereleden zijn zij, die daartoe door de ledenvergadering worden benoemd. Eereleden hebben stemrecht.

Art. 12. Het bestuur vertegenwoordigt de vereeniging in en buiten rechten.

Art. 13. Wijzigingen in de statuten kunnen, behoudens Koninklijke goedkeuring, aangebracht worden op een algemeene ledenvergadering of op een hiertoe opzettelijk bijeengeroepen vergadering, als 2/3 van het aantal uitgebrachte stemmen zich er vóór

verklaren en het voorstel tot wijziging op de agenda dier vergadering voorkomt.

Art. 14. De vereeniging wordt ontbonden, als 2/3 van de aanwezige leden op een daartoe belegde vergadering hiertoe besluiten en het voorstel tot ontbinding op de agenda voorkomt. In geval van ontbinding wordt door de algemeene vergadering over de bestemming van een mogelijk batig saldo beslist, met inachtneming van het bepaalde bij art. 1702 van het Burgerlijk Wetboek.

(Volgen de onderteekeningen).

Goedgekeurd bij Koninklijk besluit dd. 30 Maart 1940 n^{0}. 16.

Mij bekend,

De Minister van Justitie,

Namens den Minister,

De Secretaris-Generaal,

v. Angeren.

HUISHOUDELIJK REGLEMENT.

Doel en middelen.

Art. 1.

De onderwerpen, die de vereeniging tot bereiking van haar doel in behandeling zal nemen, worden nader omschreven in een werkplan. Het werkplan wordt jaarlijks door het bestuur opgemaakt en door de jaarlijksche ledenvergadering vastgesteld. Het bestuur is bevoegd in de loop van het jaar nieuwe onderwerpen op het werkplan te brengen.

Bestuur.

Art. 2.

Aan het bestuur is opgedragen de leiding en vertegenwoordiging van de vereeniging, de afdoening van spoedeischende zaken, het beheer der geldmiddelen en eigendommen der vereeniging en de uitvoering van de besluiten, vastgesteld door de ledenvergadering.

Art. 3.

De bestuursleden hebben zitting voor drie jaar; telken jare treedt een bestuurslid af. Het rooster van aftreding wordt de eerste maal door loting vastgesteld. Aftredende bestuursleden zijn terstond herkiesbaar.

Art. 4.

Het bestuur stelt voor elke vacature in het bestuur twee candidaten; elk vijftal leden kan voor elke open plaats één candidaat stellen.

Art. 5.

De benoeming tot bestuurslid geschiedt met gesloten briefjes en bij volstrekte meerderheid; wordt deze na twee stemmingen niet verkregen, dan heeft herstemming plaats tusschen de beide personen, die bij de tweede stemming de meeste stemmen hebben verkregen. Bij staking van stemmen beslist het lot.

Art. 6.

Tusschentijds optredende bestuursleden nemen op de rooster van aftreding de plaats van hun voorgangers in.

Vergaderingen.

Art. 7.

Het vereenigingsjaar loopt van 1 September tot 31 Augustus.

Art. 8.

De jaarlijksche ledenvergadering, bedoeld in art. 1 van dit reglement, wordt gehouden tusschen 1 September en 15 Januari.

Art. 9.

Tenminste vier weken voor de jaarlijksche ledenvergadering deelt de secretaris aan de leden mede, waar en wanneer zij gehouden zal worden, welke bestuursleden na de vergadering zullen aftreden en welke dubbeltallen het bestuur voor de open plaatsen stelt. Wenscht een lid een aangelegenheid onder de agenda opgenomen te zien, dan moet hij dit binnen veertien dagen na dagteekening van bedoelde mededeeling aan den secretaris berichten, Wenscht een vijftal leden een candidaat te stellen voor een open plaats in het bestuur, dan moet de opgave binnen dezelfde termijn door den secretaris zijn ontvangen.

Art. 10.

De secretaris zendt aan alle leden tenminste tien dagen voor de vergadering een oproeping bevattende de agenda en de namen van alle gestelde candidaten.

Art. 11.

Het bestuur brengt in de jaarlijksche ledenvergadering een verslag uit van de lotgevallen en werkzaamheden van de vereeniging.

Art. 12.

In de jaarlijksche ledenvergadering wordt de rekening van den penningmeester nagezien door twee leden, door den voorzitter aan te wijzen.

Art. 13.

In de jaarlijksche ledenvergadering wordt vastgesteld, waar de volgende jaarlijksche ledenvergadering wordt gehouden.

Art. 14.

Het bestuur schrijft een vergadering uit, wanneer het dit wenschelijk acht en binnen drie weken, nadat tenminste tien leden hun wensch daartoe schriftelijk aan het bestuur hebben te kennen gegeven.

Art. 15.

De vergaderingen worden geleid door den voorzitter en bij diens ontstentenis door een der andere bestuursleden.

Art. 16.

Voorstellen tot wijziging van statuten of huishoudelijk reglement worden niet behandeld, als zij niet op de agenda zijn opgenomen. Geen besluiten worden genomen over punten, welke niet op de agenda voorkomen.

Art. 17.

Bij staking van stemmen over zaken is een voorstel verworpen; bij staking van stemmen over personen beslist het lot.

Geldmiddelen.

Art. 18.

De contributie voor het volgende vereenigingsjaar wordt telken jare op de jaarlijksche ledenvergadering vastgesteld.

Art. 19.

De contributie is invorderbaar bij het begin van het vereenigingsjaar. Leden, die in de loop van het jaar toetreden, betalen bij hun toetreding.

Art. 20.

Reis- en verblijfkosten door leden van het bestuur ten behoeve der vereeniging gemaakt, worden vergoed.

Algemeene bepalingen.

Art. 21.

In gevallen, waarin statuten en huishoudelijk reglement niet voorzien of twijfel overlaten, beslist het bestuur, behoudens verantwoording aan de vergadering.

HOOFDSTUK X.

DE METHODE DER MECHANISCHE THEOREMATA

1. Wij zullen thans, in afwijking van de volgorde, waarin de werken van Archimedes in de teksteditie van Heiberg voorkomen, eerst het werk *De Methode der Mechanische Theoremata, voor Eratosthenes,* kortweg aan te duiden als *De Methode,* behandelen. De kennis van dit werk vergemakkelijkt namelijk de lectuur van *Quadratuur van de Parabool,* waarvan de inhoud weer bekend wordt ondersteld in Boek II van *Evenwichten van vlakke figuren.*

Over de ontdekking en ontcijfering van het manuscript der *Methode* spraken we reeds in Hoofdstuk II. Het doel van het werk leeren we kennen uit den inleidenden brief aan Eratosthenes, dien we hier eerst in vertaling laten volgen:

Archimedes aan Eratosthenes Heil!

Ik zond u vroeger enkele der door mij gevonden theoremata, waarvan ik de proposities had opgeschreven met de aansporing, die bewijzen, die ik nog niet bij deze gelegenheid meedeelde, te zoeken. Van de gezonden theoremata waren de proposities de volgende:

ten eerste: wanneer in een recht prisma, dat een vierkant [1]) *tot basis heeft, een cylinder wordt beschreven, die zijn bases in de tegenover elkander gelegen vierkanten heeft en zijn zijden in de andere vlakken van het prisma* [2]) *en er wordt door het centrum van den cirkel, die basis van den cylinder is, en een zijde van het vierkant in het overstaande zijvlak een plat vlak gebracht, dan zal het aangebrachte vlak een stuk van den cylinder afsnijden, dat begrensd wordt door twee vlakken en het oppervlak van den cylinder, nl. het aangebrachte vlak, het vlak, waarin de basis van den cylinder ligt, en het cylinderoppervlak tusschen de genoemde vlakken; en het van*

---

1) Er staat παραλληλόγραμμον, maar blijkens den samenhang beduidt dit woord hier een vierkant.

2) Bedoeld wordt, dat de cylindermantel de opstaande zijvlakken raakt.

den cylinder afgesneden stuk is het zesde deel van het geheele prisma[3]*.*

Van het andere theorema is dit de propositie: indien in een kubus een cylinder wordt beschreven, die de bases in overstaande vierkanten heeft en waarvan het oppervlak aan de vier overige vlakken raakt en er wordt in denzelfden kubus ook nog een andere cylinder beschreven, die de bases in andere vierkanten heeft en waarvan het oppervlak aan de vier overige vlakken raakt, dan is het lichaam, begrensd door de oppervlakken der cylinders, dat binnen beide cylinders ligt, twee derde van den geheelen kubus . . . .[4]*.*

Van deze theoremata nu zal ik u de bewijzen in dit boek toezenden.

Daar ik, zooals ik zei, weet, dat gij ijverig zijt, een voortreffelijk docent der philosophie en vol belangstelling in voorkomende mathematische onderzoekingen, heb ik gemeend, goed te doen door voor u in ditzelfde boek een zekere bijzondere methode op te schrijven en uiteen te zetten, met behulp waarvan het u mogelijk zal zijn, het vermogen te verwerven om zekere mathematische dingen in te zien met behulp van de mechanica. Ik ben overtuigd, dat dit niet minder nut heeft voor het vinden van de bewijzen van deze zelfde theoremata. Want sommige dingen, die ik eerst langs mechanischen weg had ingezien, zijn later geometrisch bewezen, omdat de beschouwingswijze volgens deze methode geen bewijskracht heeft. Want het is gemakkelijker, om het bewijs te leveren, wanneer men eerst door de methode een zekere kennis van het gezochte heeft verworven, dan iets te zoeken, zonder dat men er nog iets van weet.

Daarom komt ook van de theoremata, waarvan Eudoxos het eerst het bewijs heeft gevonden, namelijk over den kegel en de pyramide, dat de kegel het derde deel is van den cylinder en de pyramide van het prisma, die dezelfde basis hebben en gelijke hoogte, een niet gering deel aan Demokritos toe, die het eerst de bewering over de genoemde figuur[5]*) zonder bewijs heeft uitgesproken.*

---

[3]) De afleiding van dit resultaat vindt men in de Prop. 12—15.

[4]) De afleiding van dit resultaat komt in het bewaard gebleven gedeelte van de *Methode* niet voor.

[5]) Het heeft de aandacht getrokken, dat Archimedes hier het enkelvoud gebruikt, terwijl er toch eerst sprake was van stellingen over kegel en pyramide. Het lijkt echter niet waarschijnlijk, dat men hieruit iets kan afleiden.

Ook mij is het zoo gegaan, dat van het nu gepubliceerde theorema [6]) *de vondst op dezelfde manier gebeurd is als van de vroegere* [7]).

Ik wilde nu de methode schriftelijk bekend maken, deels omdat ik mij er al eerder over heb uitgelaten, opdat ik niet op sommigen den indruk zal maken, ijdele praat te hebben verkocht [7a]), *deels, omdat ik overtuigd ben, dat zij geen gering nut voor de mathesis zal afwerpen; ik vermoed namelijk, dat er zoowel onder de huidige als onder de komende generaties zullen zijn, die door de uiteengezette methode nog andere theoremata zullen vinden, die ons nog niet te beurt zijn gevallen.*

Wij schrijven nu eerst neer, wat ons ook het eerst langs mechanischen weg duidelijk is geworden, dat namelijk ieder segment van een orthotome een derde grooter is dan de driehoek, die dezelfde basis heeft en gelijke hoogte en daarna alle dingen, die langs dezen weg zijn ingezien. Aan het slot van het boek geven we de geometrische bewijzen van de theoremata, waarvan wij u vroeger de proposities hebben gezonden [8]).

Archimedes belooft ons in dit buitengemeen belangwekkende document dus een veel intiemeren blik in zijn mathematische werkplaats, dan ooit eenig ander Grieksch mathematicus aan zijn lezers heeft gegund. De Grieksche wiskunde kenmerkt zich immers — ook in dit opzicht een traditie vestigend, die tot in onzen tijd zou blijven voortbestaan — door een, oppervlakkig beschouwd, bijna overdreven zorg voor den vorm van het mathematisch betoog. Zij eischt de onverbiddelijk voortschrijdende, onweerlegbaar overredende aaneenschakeling van logische conclusies, die den synthetischen bewijstrant uitmaakt, maar ze offert daaraan de behoefte van den lezer, om ook inzicht te verkrijgen in de wijze, waarop het verkregen resultaat het eerst is ingezien, op. Aan deze behoefte komt

---

[6]) Ook hier bedoelt Archimedes blijkbaar de twee boven meegedeelde proposities.

[7]) Namelijk van allerlei stellingen uit **S.C.**, **C.S.** en **Q.P.**, zooals bij de volgende behandeling van de *Methode* blijken zal.

[7a]) In de voorrede van **Q.P.** (*Opera* II, 262. l. 11—13) zegt Archimedes, dat hij het theorema van de oppervlakte van een segment eener orthotome eerst langs mechanischen weg heeft ingezien en daarna geometrisch heeft bewezen.

[8]) Dit zijn blijkbaar de twee in den aanhef van het schrijven vermelde stellingen.

nu echter Archimedes in zijn *Methode* tegemoet: hij zal onthullen, hoe hij zelf, lang voordat hij wist, hoe hij zijn stellingen moest bewijzen, tot de overtuiging van haar juistheid is gekomen.

2. Het werk wordt geopend met een aantal lemmata over zwaartecentra, die we ten deele reeds als axioma of propositie in *Evenwichten van vlakke figuren* hebben leeren kennen. Zij spreken uit, dat, wanneer men van een grootheid een deel afneemt, het zwaartecentrum van de rest met dat van het geheel samenvalt, wanneer het verwijderde deel ditzelfde zwaartecentrum had, en dat het anders bepaald wordt op grond van de Prop. I, 8 van het genoemde werk; dat het zwaartecentrum van een stelsel grootheden, welker zwaartecentra op één rechte liggen, op dezelfde rechte ligt; dat het zwaartecentrum van een rechte lijn (d.w.z. een homogeen recht lijnstuk) het midden daarvan is, van een driehoek het snijpunt der medianen, van een parallelogram dat der diagonalen, van een cirkel het middelpunt, van een cylinder het midden van de as, van een prisma eveneens [9]) en van een kegel het punt, dat de as zoo verdeelt, dat het stuk aan den top het drievoud is van het overblijvende stuk. Bovendien wordt nog als laatste lemma de propositie **C.S.** 1 (III; 7, 20) vermeld.

Hierna volgen de proposities. We vermelden eerst voor een deel in letterlijke vertaling en zonder discussie de eerste toepassing der te beschrijven methode:

P r o p o s i t i e 1. (fig. 127).

Zij gegeven het segment $\alpha\beta\gamma$ *omvat door de rechte* $\alpha\gamma$ *en de orthotome* $\alpha\beta\gamma$*; laat* $\alpha\gamma$ *middendoor gedeeld zijn in* δ *en* $\delta\beta\varepsilon$ *parallel met den diameter getrokken zijn en* β *met* α *en* γ *verbonden.*

Ik beweer, dat het segment $\alpha\beta\gamma$ *een derde grooter is* (ἐπίτριτον) *dan de driehoek* $\alpha\beta\gamma$ [10]).

---

[9]) Hierbij beduidt, blijkens de toepassing in Prop. 13, *as* het verbindingslijnstuk van de zwaartepunten van grond- en bovenvlak. Archimedes wijkt hier af van zijn gewone spraakgebruik, waarin ἄξων steeds omwentelingsas beduidt.

[10]) De formuleering van de propositie wijkt af van het gebruikelijke type; Archimedes vermijdt in zijn meer officieele werken altijd het beroep op de figuur en de aanduiding van punten en lijnen door letters. Ook hieruit blijkt, dat de *Methode* meer te beschouwen is als een particuliere mededeeling aan Eratosthenes dan als een voor publicatie bestemd werk.

Bewijs: Laat de rechte door α parallel met $\delta\beta$ getrokken de raaklijn van de kromme in γ ontmoeten in ζ en de rechte $\gamma\beta$ in $\varkappa$; ε is het snijpunt van $\gamma\zeta$ en $\beta\delta$. Door een variabel punt ξ van $\alpha\gamma$ wordt een rechte parallel met $\delta\beta$ getrokken, die de kromme ontmoet in o, $\gamma\beta$ in ν, $\gamma\zeta$ in μ.

Maak verder

$$\varkappa\vartheta = \varkappa\gamma.$$

Bekend is nu

$$\delta\beta = \beta\varepsilon \quad \text{(III; 2, 2)}$$

dus

$$\alpha\varkappa = \varkappa\zeta \text{ en } \xi\nu = \nu\mu.$$

Verder is

$$(o\xi,\ o\mu) = (\alpha\xi,\ \xi\gamma) \quad \text{(III; 2, 7)}$$

dus

$$(o\xi,\ \xi\mu) = (\alpha\xi,\ \alpha\gamma) = (\varkappa\nu,\ \varkappa\gamma) = (\varkappa\nu,\ \varkappa\vartheta).$$

Fig. 127.

En[11]) *daar ν het centrum der zwaarte is van de rechte $\mu\xi$, zal, indien wij $\tau\eta$ gelijk stellen aan ξo en haar zwaartecentrum ϑ, zoodat $\tau\vartheta = \vartheta\eta$, $\tau\vartheta\eta$ evenwicht maken met $\mu\xi$, op haar plaats blijvende, omdat $\vartheta\nu$ verdeeld wordt in omgekeerde reden der zwaarten $\tau\eta$ en $\mu\xi$, namelijk zoo, dat zooals $\vartheta\varkappa$ tot $\varkappa\nu$ staat, zoo ook $\mu\xi$ tot $\eta\tau$, zoodat van het uit beide samengestelde gewicht $\varkappa$ het zwaartecentrum is. Evenzoo zullen, hoeveel rechten er in den driehoek $\zeta\alpha\gamma$ ook parallel met $\varepsilon\delta$ getrokken worden, zij, op haar plaats blijvende, evenwicht maken met de door de kromme van haar afgesneden stukken, overgebracht naar ϑ . . . . .*

En daar uit de lijnen in den driehoek $\gamma\zeta\alpha$ de driehoek $\gamma\zeta\alpha$ bestaat en uit de lijnen, die binnen de kromme op de wijze van ξo zijn afgesneden, het segment $\alpha\beta\gamma$ bestaat, zal dus de driehoek $\zeta\alpha\gamma$, op zijn plaats blijvende, evenwicht maken ten opzichte van het punt $\varkappa$ met het segment der kromme, geplaatst om ϑ als zwaartepunt, zoodat $\varkappa$ hun gemeenschappelijk zwaartecentrum is.

---

[11]) *Opera* II, 436; l. 10—30.

Zij nu χ centrum der zwaarte van $\triangle\ \alpha\zeta\gamma$. χ ligt op $\gamma\varkappa$, zoodat

$$\gamma\varkappa = \varkappa\theta = 3\,\varkappa\chi.$$

Daar er evenwicht is tusschen $\triangle\ \alpha\zeta\gamma$, op zijn plaats blijvende, en segment $\alpha\beta\gamma$ om ϑ als zwaartecentrum, geldt (omgekeerde van **Pl. Ae.** I, 6, 7)

$$(\triangle\ \alpha\zeta\gamma,\ \text{segment}\ \alpha\beta\gamma) = (\varkappa\vartheta,\ \varkappa\chi) = (3, 1)$$

dus

$$\triangle\ \alpha\zeta\gamma = 3\ .\ \text{segment}\ \alpha\beta\gamma.$$

Daar nu

$$\triangle\ \alpha\zeta\gamma = 2\ .\ \triangle\ \alpha\varepsilon\gamma = 4\ .\ \triangle\ \alpha\beta\gamma$$

blijkt dus

$$\text{segment}\ \alpha\beta\gamma = \tfrac{4}{3}\ .\ \triangle\ \alpha\beta\gamma$$

Dit is dus door het nu meegedeelde niet bewezen, maar er is een zekere indruk gewekt, dat de conclusie juist is. Daar wij dus zien, dat de conclusie niet bewezen is, maar wij vermoeden, dat zij juist is, zullen wij het vroeger gepubliceerde meetkundige bewijs, dat wij er zelf voor hebben gevonden, ter bestemder plaatse vermelden [12]).

Hier schijnt het, dat Archimedes van plan is geweest, aan het eind van de *Methode* de exacte mathematische bewijzen van alle langs den beschreven weg gevonden stellingen te verzamelen, ook wanneer ze, zooals voor de juist behandelde stelling in *Quadratuur van de Parabool* het geval was, reeds eerder waren gepubliceerd.

3. De methode, die Archimedes wil uiteenzetten, komt in de behandelde propositie zoo duidelijk uit, dat we reeds nu tot haar bespreking kunnen overgaan.

We kunnen dan vooreerst opmerken, dat zij gekenmerkt wordt door de toepassing van twee verschillende beginselen: zij maakt ten eerste gebruik van beschouwingen, die aan de mechanica ontleend zijn, doordat ze meetkundige figuren zoo aan een hefboom bevestigd denkt, dat deze in evenwicht blijft en nu voorwaarden voor dat evenwicht opstelt; en zij steunt verder op de opvatting, dat de oppervlakte van een vlakke figuur te beschouwen is als de som van de lengten van alle lijnstukken, die daarin in een bepaalde richting getrokken zijn en waaruit de figuur bestaand wordt gedacht; deze opvatting zal in de volgende proposities in dier voege

---

[12]) *Opera* II, 438; l. 16—21.

op de ruimte worden uitgebreid, dat ook een lichaam bestaand wordt gedacht uit alle doorsneden, die een zich verplaatsend plat vlak van vaste vlakstelling daarin bepaalt en dat daarna ook de inhoud van het lichaam beschouwd wordt als som van de oppervlakten dier doorsneden. We zullen deze twee methodische beginselen aanduiden door de trefwoorden: „barycentrische beschouwingswijze" en „methode der indivisibilia".

We zagen verder, dat Archimedes de door deze tweeledige methode verkregen resultaten niet als werkelijk bewezen conclusies wil erkennen. Men kan nu vragen, waarin voor zijn opvatting het gemis aan exactheid schuilt, in het barycentrisch karakter der redeneeringen, in de toepassing der indivisibilia of in beide.

Op deze vraag is het antwoord zonder veel twijfel te geven: het mathematisch onvolwaardige is uitsluitend een gevolg van het gebruik van de indivisibilia; tegen behoorlijk gefundeerde barycentrische beschouwingen, zooals we in Prop. 1 reeds zagen toepassen, bestaat geenerlei wiskundig bezwaar.

Dat dit inderdaad de zienswijze van Archimedes is, blijkt wel het duidelijkst hieruit, dat hij het in Prop. 1 verworven inzicht omtrent de oppervlakte van een segment eener orthotome in zijn werk *Quadratuur van de Parabool,* dat een officieele, aan alle eischen der exactheid voldoende publicatie vormt, opnieuw met statische beschouwingen, maar nu zonder indivisibilia, bewijst [13]). Bovendien maakt de wijze, waarop hij in *Evenwichten van vlakke figuren* de leer van den hefboom axiomatisch opbouwt, sterk den indruk, dat hij tusschen zijn Elementen der Statica en de systematiseering der planimetrie, zooals Euclides die gegeven had, geenerlei verschil in wezen ziet [14]).

Kon dus Archimedes zich onbekommerd van de waarschijnlijk

---

[13]) Het is waar, dat hij het ook nog eens met zuiver geometrische hulpmiddelen doet; er is echter geen enkele aanleiding om te meenen, dat hij de twee bewijzen niet als gelijkwaardig zou hebben beschouwd.

[14]) De opvatting, dat de toepassing van mechanische beschouwingen juist wel aanleiding zou hebben gegeven, de bewijzen uit de *Methode* als onexact te beschouwen, wordt gehuldigd door Hk. de Vries, *Historische Studien* (Groningen 1926) p. 139. Het is waar, dat de uitlating in het inleidend schrijven, dat de beschouwing volgens de meegedeelde methode geen bewijskracht heeft, in verband met het feit, dat de methode als mechanisch wordt betiteld, voor deze opvatting pleit. Op grond van de boven aangevoerde argumenten kunnen wij haar echter niet deelen.

door hem zelf ingevoerde barycentrische methode ter behandeling van mathematische problemen bedienen, des te meer twijfel en onzekerheid moest hij gevoelen bij de toepassing van de beschouwingswijze der indivisibilia; immers hiermee roerde hij een kwestie aan, die in de voor hem verstreken eeuwen als nauwelijks één andere in de Grieksche wiskunde aanleiding tot heftig meeningsverschil had gegeven [15]). Het was de diepgaande kwestie van atomistiek of continuiteit, die, uit de physica afkomstig, ook in mathematicis de gemoederen verdeeld hield en die haar duidelijkste uitdrukking vindt in de aporie, die Demokritos kwelde: als de cirkelvormige doorsneden, die in een kegel parallel met het grondvlak zijn aan te brengen, onderling congruent zijn, hoe kan de kegel dan van een cylinder verschillen; en als ze naar den top toe kleiner worden, is dan de mantel, die glad moet zijn, niet trapvormig?

De sterke invloed, dien deze kwestie op de geschiedenis van de Grieksche wiskunde heeft uitgeoefend, is weliswaar niet meer in details te reconstrueeren, maar niettemin in beginsel duidelijk genoeg te herkennen. Het opzienbarend ingrijpen van Zenoon van Elea in de ontwikkeling van het wiskundig denken schijnt wel voor een groot deel veroorzaakt te zijn door de verlegenheden, waarin het mathematisch continuum het menschelijk intellect bracht; de befaamde grondslagencrisis, die ca. 400 v. Chr. den geleidelijken groei der mathesis is komen verstoren, vond er zijn wellicht krachtigste bron in; de heropbouw, waaraan de naam van Eudoxos verbonden is, kwam niet in de laatste plaats door de overwinning van deze denkmoeilijkheid tot stand.

Van toen af was het uit met de onbevangenheid, waarmee men steeds over het oneindige had gesproken, alsof het woord niets anders beduidde dan iets heel groots, maar eindigs; de methode van den indirecten grensovergang bond de toepassing van oneindige processen aan de strenge vormen, die we Archimedes tot dusver in al zijn werken in acht hebben zien nemen; en wanneer men niet wist, dat in de wiskunde uitvinden iets heel anders is dan bewijzen en dat de weg, waarlangs de lezer tot de overtuiging van de juistheid van een stelling wordt gebracht, vaak in het geheel niet lijkt op dien, waarlangs zij het eerst werd gevonden, zou men kunnen

---

[15]) Voor een meer uitvoerige behandeling van deze kwestie zie men *Elementen van Euclides* I, 41 seq.

meenen, dat de methode der indivisibilia na Eudoxos voor goed uit de Grieksche wiskunde was verdwenen.

De *Methode* heeft ons onthuld — en hierin ligt de eminente beteekenis van haar ontdekking — dat de indivisibilia slechts uit de gepubliceerde verhandelingen waren verbannen, maar dat zij in de werkplaats van den productieven wiskundige onverzwakt de scheppende kracht bleven uitoefenen, die zij in latere perioden — bij Cavalieri, bij Galilei, bij Huygens, bij Leibniz—nog zoo vaak zouden ontplooien. Onbekommerd om het redelijk onhoudbare van de opvatting en als merkwaardig voorbeeld van de vruchtbaarheid, die aan irrationeele denkwijzen ook in de meest rationeele aller wetenschappen eigen kan zijn, beschouwt Archimedes, zoolang hij nieuwe resultaten zoekt, een paraboolsegment als de som van al zijn ordinaten of een lichaam als som van al zijn doorsneden in evenwijdige vlakken; en we hooren hem, over een figuur sprekende, reeds onbezorgd de uitdrukkingen „alle lijnen" of „alle cirkels" gebruiken, die daarvoor in de 17e eeuw gangbaar zullen worden en die de verzameling van alle onderling evenwijdige indivisibilia aanduiden, die de figuur, zooals het technisch heet, „vullen".

Dit is het belangrijke nieuwe inzicht, dat de publicatie der *Methode* ons heeft geschonken. Bovendien stelt zij ons, zooals nader aan voorbeelden zal worden toegelicht, in staat, in verschillende gevallen de ontwikkeling van een propositie van haar onstrenge, intuitief overtuigende uitvinding af tot aan haar onberispelijke, abstract overredende uiteenzetting in een gepubliceerd werk te vervolgen.

Tusschen deze beide phasen van het proces blijft Archimedes steeds een scherp onderscheid maken: Demokritos heeft de stelling, dat iedere pyramide het derde deel is van een prisma, dat er grondvlak en hoogte mee gemeen heeft, gevonden (wellicht ook met indivisibilia), maar Eudoxos heeft haar pas bewezen. Dat een paraboolsegment een derde deel grooter is dan de driehoek, die er basis en top mee gemeen heeft, is op grond van Prop. 1 der *Methode* te vermoeden; maar eerst in de lange keten van proposities, die het werk *Quadratuur van de Parabool* bevat, zal dit vermoeden tot den rang eener bewezen bewering worden verheven.

4. Voordat we nu overgaan tot de behandeling van de andere proposities van de *Methode*, moeten we nog een toelichting geven

op het eigenlijk mechanische deel van de toegepaste redeneerwijze. Het blijkt, dat er telkens een der rechte lijnen van de figuur als een onstoffelijke in zijn zwaartepunt ondersteunde balans ($\zeta v \gamma \acute{o} \varsigma$) beschouwd wordt, dat daarin in een of meer punten vlakke of ruimtelijke figuren zoo bevestigd zijn, dat het bevestigingspunt tevens het zwaartecentrum van de figuur is en dat van andere figuren „alle lijnen" of „alle doorsneden" naar een van de uiteinden van den hefboom worden overgebracht (in Prop. 1 alle ordinaten $o\xi$ van het segment der orthotome naar ϑ). De bedoeling is dan, dat na die overbrenging uit al die lijnen of doorsneden de figuur, waaraan ze ontleend zijn, weer wordt opgebouwd, maar zoo, dat het uiteinde, waarin ze elk met hun zwaartecentrum zijn geplaatst, ook weer zwaartecentrum van de gereconstrueerde figuur is. Dat daardoor het eenmaal gevestigde hefboomevenwicht niet wordt verstoord, wordt gewaarborgd door axioma VI van *Evenwichten van vlakke figuren:* de reconstructie laat gewicht en plaats der figuur onveranderd en het eenmaal aanwezige evenwicht blijft daarbij bestaan. De fundamenteele beteekenis, die dit axioma hierdoor voor de *Methode* blijkt te bezitten, overtuigt ons achteraf nog eens van de juistheid der gelijkluidende interpretatie, die we er, in aansluiting aan Toeplitz, in *Evenwichten van vlakke figuren* van gaven.

5. We zetten thans de behandeling der proposities voort.

Propositie 2.

Dat iedere bol het viervoud is van den kegel, die de basis gelijk heeft aan den grootsten cirkel van den bol en de hoogte gelijk aan den straal van den bol en dat de cylinder, die de basis gelijk heeft aan den grootsten cirkel van den bol en de hoogte gelijk aan de middellijn van den bol, anderhalf maal de bol is, wordt volgens deze methode als volgt ingezien.

Laat (fig. 128) $\alpha\beta\gamma\delta$ een grootste cirkel van den bol zijn, $\alpha\gamma$ en $\beta\delta$ twee onderling loodrechte diameters daarvan. Beschouw den kegel met top α, waarvan de basis de grootste cirkel is in het vlak door $\beta\delta$ loodrecht op $\alpha\gamma$. De uitgebreide mantel van dezen kegel snijdt het vlak door γ loodrecht op $\alpha\gamma$ volgens een cirkel met diameter $\varepsilon\zeta$. Deze cirkel is basis van een cylinder $\varepsilon\zeta\eta\lambda$ met hoogte $\alpha\gamma$.

Maak $\alpha\vartheta = \alpha\gamma$ en beschouw $\gamma\vartheta$ als balans met steunpunt α. Een veranderlijk vlak $\mu\nu$ loodrecht op $\alpha\gamma$ snijdt kegel, bol en cylinder volgens cirkels, welker diameters opv. zijn $\pi\varrho$*), ξo en $\mu\nu$ en die we aanduiden door $\mathbf{K}\,(\pi\varrho)$, $\mathbf{K}\,(\xi o)$, $\mathbf{K}\,(\mu\nu)$.

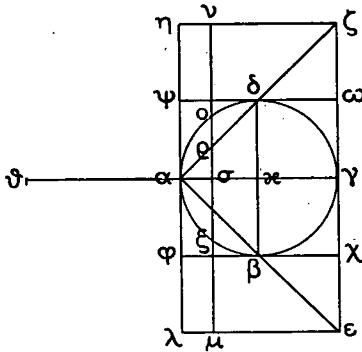


Fig. 128.

Nu is wegens

$$\varrho\sigma = \alpha\sigma$$

$$\mathbf{T}\,(\varrho\sigma) + \mathbf{T}\,(o\sigma) = \mathbf{T}\,(\alpha o) =$$
$$= \mathbf{O}\,(\alpha\sigma,\ \alpha\gamma)$$

dus wegens

$$\nu\sigma = \alpha\gamma$$

$$[\mathbf{T}\,(\nu\sigma),\ \mathbf{T}\,(\varrho\sigma) + \mathbf{T}\,(o\sigma)] =$$
$$[\mathbf{T}\,(\alpha\gamma),\ \mathbf{O}\,(\alpha\sigma,\ \alpha\gamma)] =$$
$$(\alpha\gamma,\ \alpha\sigma) = (\alpha\vartheta,\ \alpha\sigma) \qquad (1)$$

of

$$[\mathbf{K}\,(\mu\nu),\ \mathbf{K}\,(\pi\varrho) + \mathbf{K}\,(\xi o)] = (\alpha\vartheta, \alpha\sigma),$$

De cirkel $\mathbf{K}\,(\mu\nu)$ suo loco [16]) kan dus de cirkels $\mathbf{K}(\pi\varrho)$ en $\mathbf{K}(\xi o)$, beide in ϑ geplaatst (d.w.z. zoo geplaatst, dat hun zwaartecentra in ϑ vallen), in evenwicht houden. Dus is er ook evenwicht tusschen den cylinder $\varepsilon\zeta\eta\lambda$ suo loco en de combinatie in ϑ van den bol $\alpha\beta\gamma\delta$ en den kegel $\alpha\varepsilon\zeta$ (de drie lichamen worden immers door de boven vermelde cirkels opgevuld, als het vlak $\mu\nu$ zich beweegt van $\eta\lambda$ naar $\zeta\varepsilon$.)

Daar nu $\varkappa$ zwaartecentrum van den cylinder is, geldt de betrekking

$$(\text{Bol} + \text{Kegel, Cylinder}) = (\alpha\varkappa,\ \alpha\vartheta)$$

dus

$$\text{Cylinder} = 2\ (\text{Bol} + \text{Kegel})$$

De cylinder is het drievoud van den kegel, dus volgt uit de laatste betrekking

$$\text{Kegel } \alpha\varepsilon\zeta = 2.\ \text{Bol } \alpha\beta\gamma\delta$$

dus

$$\text{Bol } \alpha\beta\gamma\delta = 4.\ \text{Kegel } \alpha\beta\delta$$

Ook de stelling over de verhouding van den bol en den cylinder is nu onmiddellijk duidelijk.

---

*) Bij het snijpunt van de rechten $\alpha\varepsilon$ en $\mu\nu$ is de letter π weggevallen.

16) Door deze Latijnsche vertaling van de Grieksche uitdrukking αὐτοῦ μένων geven we aan, dat de beschouwde figuur blijft, waar ze is.

Toen dit was ingezien, ontstond het vermoeden, dat de oppervlakte van elken bol het viervoud is van een grootsten cirkel op den bol. De onderstelling was namelijk, dat, zooals iedere cirkel gelijk is aan een driehoek, die den omtrek van den cirkel tot basis heeft en de hoogte gelijk aan den straal van den cirkel, zoo ook iedere bol gelijk is aan een kegel, die de oppervlakte van den bol tot basis heeft en de hoogte gelijk aan den straal van den bol.

We krijgen hier een waarlijk verrassenden kijk op de wijze, waarop Archimedes zijn beide beroemde stellingen 33 en 34 van *Over Bol en Cylinder I* gevonden heeft. Het blijkt namelijk, dat de stelling over den inhoud het eerst ontdekt is en dat toen de vermoede analogie met de relatie tusschen oppervlakte en omtrek van den cirkel tot de stelling over de oppervlakte heeft geleid.

Propositie 3.

Door deze methode wordt ook ingezien, dat de cylinder, die een basis heeft gelijk aan den grootsten cirkel van een sphaeroide en een hoogte gelijk aan de as van de sphaeroide, anderhalf maal zoo groot is als de sphaeroide; wanneer dit is ingezien, is het duidelijk, dat wanneer een sphaeroide gesneden wordt met een vlak door het middelpunt loodrecht op de as, de helft van de sphaeroide het dubbele is van den kegel, die dezelfde basis heeft als het segment en dezelfde as.

Het bewijs is, wat de mechanische redeneering betreft, gelijkluidend met dat van Prop. 2. De evenredigheid (1) eischt echter een langere afleiding, omdat in fig. 128 $\alpha\beta\gamma\delta$ nu als oxytome moet worden gedacht, die door wenteling om een harer assen, $\alpha\gamma$, de sphaeroide (omwentelingsellipsoide) voortbrengt.

Volgens het symptoom der oxytome (III; 3,0) is

$$[\mathbf{T}\,(o\sigma),\ \mathbf{O}\,(\alpha\sigma,\ \gamma\sigma)] = [\mathbf{T}\,(\delta\varkappa),\ \mathbf{T}\,(\alpha\varkappa)] = [\mathbf{T}\,(\varrho\sigma),\ \mathbf{T}\,(\alpha\sigma)]$$

dus

$$[\mathbf{T}\,(o\sigma),\ \mathbf{T}\,(\varrho\sigma)] = (\gamma\sigma,\ \alpha\sigma) = (\nu\zeta,\ \alpha\sigma) = (\nu\varrho,\ \varrho\sigma) =$$
$$= [\mathbf{O}\,(\nu\varrho,\ \varrho\sigma),\ \mathbf{T}\,(\varrho\sigma)]$$

dus

$$\mathbf{T}\,(o\sigma) = \mathbf{O}\,(\varrho\sigma,\ \nu\varrho).$$

Hieruit volgt

$$\mathbf{T}\,(\varrho\sigma) + \mathbf{T}\,(o\sigma) = \mathbf{O}\,(\varrho\sigma,\ \varrho\sigma + \nu\varrho) = \mathbf{O}\,(\varrho\sigma,\ \nu\sigma).$$

Nu is

$$[\mathbf{T}(\nu\sigma), \mathbf{T}(\varrho\sigma) + \mathbf{T}(o\sigma)] = (\nu\sigma, \varrho\sigma) = (\zeta\gamma, \varrho\sigma) = (\alpha\gamma, \alpha\sigma) = (\alpha\vartheta, \alpha\sigma).$$

Verder verloopt alles als in Prop. 2.

Het exacte bewijs van de stelling over de halve sphaeroide is geleverd **C.S.** 27.

P r o p o s i t i e 4.

Dat ieder segment van een orthoconoide afgesneden door een vlak loodrecht op de as anderhalf maal zoo groot is als de kegel, die dezelfde basis heeft als het segment en dezelfde as, wordt volgens deze methode als volgt ingezien.

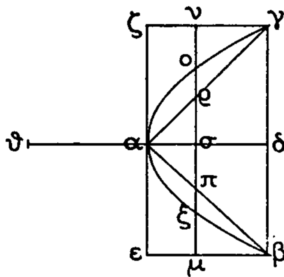


Fig. 129.

Laat (fig. 129) de orthotome $\alpha\beta\gamma$ door wenteling om den diameter $\alpha\delta$ een orthoconoide voortbrengen, waarvan door een vlak door δ loodrecht op $\alpha\delta$ een segment wordt afgesneden. Een veranderlijk vlak $\mu\nu$ loodrecht op $\alpha\delta$ snijdt de orthoconoide volgens een cirkel met diameter $o\xi$ en den cylinder, die met het segment basis en hoogte gemeen heeft, volgens een cirkel met diameter $\mu\nu$. Maak weer $\alpha\vartheta = \alpha\delta$ en beschouw $\delta\vartheta$ als balans met steunpunt α.

Men heeft nu wegens het symptoom der orthotome (III; 2,0):

$$[\mathbf{T}(\nu\sigma), \mathbf{T}(o\sigma)] = [\mathbf{T}(\gamma\delta), \mathbf{T}(o\sigma)] = (\alpha\delta, \alpha\sigma) = (\alpha\vartheta, \alpha\sigma)$$

Hieruit blijkt, dat $\mathbf{K}(\mu\nu)$ suo loco evenwicht maakt met $\mathbf{K}(o\xi)$ in ϑ, dus ook de cylinder suo loco met het segment in ϑ. Daar het zwaartecentrum van den cylinder het midden $\varkappa$ van $\alpha\delta$ is, volgt hieruit

$$\text{Cylinder } \beta\gamma\zeta\varepsilon = 2. \text{ Segment } \alpha\beta\gamma$$

dus

$$\text{Segment } \alpha\beta\gamma = \tfrac{3}{2}. \text{ Kegel } \alpha\beta\gamma.$$

Het exacte bewijs in **C.S.** 21.

6. In de tot dusver behandelde proposities kon uit de beschouwing van het evenwicht van de balans de inhoud gevonden worden van het lichaam dat, in zijn doorsneden opgelost, naar een der

uiteinden was overgebracht, omdat van het lichaam, dat suo loco aan de balans bevestigd was, zoowel de inhoud als de ligging van het zwaartecentrum bekend was. Is echter de inhoud van het overgebrachte lichaam bekend, dan kan volgens deze zelfde methode de ligging van het zwaartecentrum van het niet verplaatste bepaald worden. Dit geschiedt in Prop. 5 voor een recht segment van een orthoconoide, in Prop. 6 voor een halven bol, in Prop. 9 voor een bolsegment.

Propositie 5.

Dat van een segment van een orthoconoide afgesneden door een vlak loodrecht op de as het zwaartecentrum op de rechte ligt, die as van het segment is, welke rechte er zoo door verdeeld wordt, dat het stuk aan den top het dubbele is van het overblijvende stuk, wordt volgens deze methode als volgt ingezien.

We vergelijken thans in fig. 129 de cirkels $\mathbf{K}\,(o\xi)$ en $\mathbf{K}\,(\pi\varrho)$. Men heeft

$$[\mathbf{T}\,(o\sigma),\ \mathrm{T}\,(\gamma\delta)] = (\alpha\sigma,\ \alpha\delta) = (\varrho\sigma,\ \gamma\delta) = [\mathbf{T}\,(\varrho\sigma),\ \mathbf{O}\,(\varrho\sigma,\ \gamma\delta)]$$

dus

$$[\mathbf{T}\,(o\sigma),\ \dot{\mathbf{T}}\,(\varrho\sigma)] = (\gamma\delta,\ \varrho\sigma) = (\alpha\delta,\ \alpha\sigma) = (\alpha\vartheta,\ \alpha\sigma)$$

Hieruit volgt, dat $\mathbf{K}\,(o\xi)$ suo loco evenwicht maakt met $\mathbf{K}\,(\pi\varrho)$ in ϑ, dus het conoidsegment suo loco met den kegel $\alpha\beta\gamma$ in ϑ. Daar de inhoud van het segment anderhalfmaal zoo groot is als die van den kegel, is dus de afstand van α tot het zwaartecentrum $\frac{2}{3}\ \alpha\delta$.

Propositie 6.

Van iederen halven bol ligt het centrum der zwaarte op de rechte, die er de as van is, welke er zoo door wordt verdeeld, dat het stuk, dat aan het oppervlak van den halven bol grenst, tot het andere stuk de reden heeft, die vijf heeft tot drie.

De halve bol wordt voortgebracht (fig. 130) door wenteling van den halven cirkel $\alpha\delta\beta$ om $\alpha\gamma$. Men heeft nu als boven:

$$[\mathbf{T}\,(\varrho\varepsilon),\ \mathbf{T}\,(\varrho\varepsilon) + \mathbf{T}\,(o\varepsilon)] = [\mathbf{T}\,(\alpha\varepsilon),\ \mathbf{T}\,(\alpha o)] = (\alpha\varepsilon,\ \alpha\gamma) = (\alpha\varepsilon,\ \alpha\vartheta)$$

Hieruit volgt, dat $\mathbf{K}\,(\pi\varrho)$ en $\mathbf{K}\,(o\xi)$ suis locis samen evenwicht maken met $\mathbf{K}\,(\pi\varrho)$ in ϑ, dus de halve bol $\alpha\delta\beta$ en de kegel $\alpha\delta\beta$ suis locis samen met den kegel alleen in ϑ. Breng nu in ϑ een cylinder M aan, die evenwicht maakt met den kegel suo loco en een cylinder N,

die evenwicht maakt met den halven bol suo loco. (De bedoeling is, dat ϑ van beide cylinders het zwaartecentrum is).

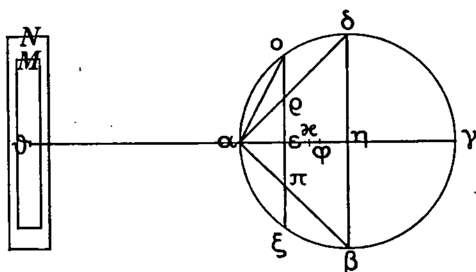


Fig. 130.

Is nu φ zwaartecentrum van den kegel en $\varkappa$ dat van den halven bol, dan is

$$\alpha\varphi = \tfrac{3}{4}\,\alpha\eta = \tfrac{3}{8}\,\alpha\vartheta$$

dus

$$M = \tfrac{3}{8}.\ \text{Kegel}\ \alpha\delta\beta.$$

Dus is

$$N = \tfrac{5}{8}.\ \text{Kegel}\ \alpha\delta\beta = \tfrac{5}{16}.\ \text{Halve Bol}\ \alpha\delta\beta$$

en, daar N in ϑ den halven bol suo loco in evenwicht houdt, is ook

$$\alpha\varkappa = \tfrac{5}{16}\,\alpha\vartheta = \tfrac{5}{8}\,\alpha\eta$$

waaruit het gestelde volgt.

Propositie 7.

Door deze methode wordt ook ingezien, dat ieder segment van een bol tot den kegel, die dezelfde basis heeft als het segment en dezelfde as, de reden heeft, die de som van den straal van den bol en de hoogte van het overblijvende segment tot de hoogte van het overblijvende segment heeft.

Het segment ontstaat (fig. 131) door wenteling van het cirkelsegment $\alpha\beta\delta$ om $\alpha\gamma$. $\nu\tau$ is de middellijn loodrecht op $\alpha\gamma$. Als boven is $\alpha\vartheta = \alpha\gamma$ en wordt $\vartheta\gamma$ als balans beschouwd met steunpunt α. Verder is $\eta\varkappa = \eta\lambda = \alpha\gamma$. $\varkappa\lambda$ is diameter van de basis van een cylinder met hoogte $\alpha\eta$. Als in Prop. 2 wordt ingezien, dat deze cylinder suo loco evenwicht maakt met de combinatie van den kegel $\alpha\varepsilon\zeta$ en het bolsegment, beide in ϑ. Is nu χ het zwaartecentrum van den cylinder, dus $\alpha\chi = \frac{1}{2}\,\alpha\eta$, dan geldt dus:

(Kegel $\alpha\varepsilon\zeta$ + Segment, Cylinder) =

$$= (\alpha\chi, \alpha\vartheta) = [\mathbf{O}\,(\alpha\vartheta,\ \alpha\chi), \mathbf{T}(\alpha\vartheta)] \qquad (1)$$

Fig. 131.

Ook is

(Cylinder, Kegel $\alpha\varepsilon\zeta$) =

$= [\mathbf{T}(\eta\lambda), \tfrac{1}{3}\,\mathbf{T}(\eta\zeta)]$

Hierin is

$\eta\lambda = \alpha\gamma = \alpha\vartheta$ en $\eta\zeta = \alpha\eta$, dus

$\tfrac{1}{3}\,\mathbf{T}(\eta\zeta) = \mathbf{O}(\tfrac{2}{3}\,\alpha\eta, \tfrac{1}{2}\,\alpha\eta) =$

$\mathbf{O}(\tfrac{2}{3}\,\alpha\eta, \alpha\chi) = \mathbf{O}(\alpha\varphi, \alpha\chi)$

wanneer φ een punt op $\alpha\eta$ is, zoodat $\alpha\varphi = \tfrac{2}{3}\,\alpha\eta$.

Dus is

(Cylinder, Kegel $\alpha\varepsilon\zeta$) =

$[\mathbf{T}(\alpha\vartheta), \mathbf{O}(\alpha\varphi, \alpha\chi)]$ (2)

Uit (1) en (2) volgt *ex aequali*

(Kegel $\alpha\varepsilon\zeta$ + Segment, Kegel $\alpha\varepsilon\zeta$) = $(\alpha\vartheta, \alpha\varphi)$

dus

(Segment, Kegel $\alpha\varepsilon\zeta$) = $(\gamma\varphi, \alpha\varphi) = (\tfrac{3}{2}\,\gamma\varphi, \alpha\eta)$ (3)

Ook is

[Kegel $\alpha\varepsilon\zeta$, Kegel $\alpha\beta\delta$] = $[\mathbf{T}(\zeta\eta), \mathbf{T}(\beta\eta)]$

$= [\mathbf{T}(\alpha\eta), \mathbf{T}(\beta\eta)] = (\alpha\eta, \gamma\eta)$ (4)

Uit (3) en (4) volgt *ex aequali*

(Segment, Kegel $\alpha\beta\delta$) = $(\tfrac{3}{2}\,\gamma\varphi, \gamma\eta)$

Hierin is, wanneer R den bolstraal voorstelt,

$$\tfrac{3}{2}\,\gamma\varphi = \tfrac{3}{2}\,(\alpha\gamma - \alpha\varphi) = 3R - \alpha\eta = R + \gamma\eta$$

zoodat

(Segment, Kegel $\alpha\beta\delta$) = $(R + \gamma\eta, \gamma\eta)$

Het exacte bewijs staat **S.C.** II,2.

In Prop. 8 wordt alleen vermeld, dat men langs dezen weg ook den inhoud van een sphaeroid-segment kan vinden (**C.S.**29 en 31).

Propositie 9.

Van ieder bolsegment ligt het centrum der zwaarte op de rechte, die as van het segment is, welke er zoo door wordt verdeeld, dat het stuk aan den top van het segment tot het overblijvende stuk de reden heeft, die de som van de as van het segment en het viervoud van de as van het segment aan de andere zijde heeft tot de som van de

as van het segment en het dubbele van de as, die in het segment aan de andere zijde vervat is.

In fig. 132, waarvan de beteekenis overigens zonder toelichting duidelijk zal zijn, zij χ het gezochte zwaartecentrum van het bolsegment $\alpha\beta\delta$, φ dat van den kegel $\alpha\varepsilon\zeta$ (dus $\eta\varphi = \frac{1}{4}\,\alpha\eta$). Als in Prop. 6 ziet men in, dat het bolsegment en de kegel $\alpha\varepsilon\zeta$ suis locis

Fig. 132.

samen evenwicht maken met den kegel $\alpha\varepsilon\zeta$ in ϑ. Vervangt men nu den kegel $\alpha\varepsilon\zeta$ in ϑ door de som van twee cylinders M en N (zoodat Kegel $\alpha\varepsilon\zeta = M + N$), waarvan M in ϑ evenwicht maakt met den kegel $\alpha\varepsilon\zeta$ suo loco, dan zal N in ϑ het segment suo loco in evenwicht houden.

Men heeft dus

$$(\text{Cylinder } N, \text{ Segment}) = (\alpha\varphi, \alpha\vartheta) \qquad (1)$$

Verder is, als $\gamma\xi$ gelijk is aan den bolstraal

$$(\text{Segment, Kegel } \alpha\beta\delta) = (\eta\xi, \eta\gamma) \qquad (\text{Prop. } 7)$$

en

$$(\text{Kegel } \alpha\beta\delta, \text{ Kegel } \alpha\varepsilon\zeta) = [\mathbf{T}(\delta\eta), \mathbf{T}(\zeta\eta)] =$$

$$= [\mathbf{O}(\alpha\eta, \gamma\eta), \mathbf{T}(\alpha\eta)] = (\gamma\eta, \alpha\eta)$$

dus *ex aequali*

$$(\text{Segment, Kegel } \alpha\varepsilon\zeta) = (\eta\xi, \alpha\eta) \qquad (2)$$

Verder is

$$(\text{Kegel } \alpha\varepsilon\zeta, \text{ Cylinder } M) = (\alpha\vartheta, \alpha\varphi) = (\alpha\gamma, \alpha\varphi)$$

dus

$$(\text{Kegel } \alpha\varepsilon\zeta, \text{ Cylinder } N) = (\alpha\gamma, \gamma\varphi) \qquad (3)$$

Uit (2) en (3) volgt

$$(\text{Segment, Cylinder } N) = [\mathbf{O}(\alpha\gamma, \eta\xi), \mathbf{O}(\alpha\eta, \gamma\varphi)]$$

en door vergelijking met (1)

$$(\alpha\vartheta, \alpha\chi) = [\mathrm{O}\,(\alpha\gamma, \eta\xi), \mathrm{O}\,(\alpha\eta, \gamma\varphi)]$$

dus, daar $\alpha\vartheta = \alpha\gamma$

$$\mathrm{O}\,(\alpha\chi, \eta\xi) = \mathrm{O}\,(\alpha\eta, \gamma\varphi)$$

of

$$(\eta\xi, \alpha\eta) = (\gamma\varphi, \alpha\chi)$$

Hierin is

$$\eta\xi = \tfrac{1}{2}\,(\alpha\eta + \eta\gamma) + \eta\gamma = \tfrac{1}{2}\,\alpha\eta + \tfrac{3}{2}\,\eta\gamma$$

en

$$\gamma\varphi = \tfrac{1}{4}\,\alpha\eta + \eta\gamma$$

Daardoor is

$$(\tfrac{1}{2}\,\alpha\eta + \tfrac{3}{2}\,\eta\gamma, \alpha\eta) = (\tfrac{1}{4}\,\alpha\eta + \eta\gamma, \alpha\chi) = (\tfrac{1}{4}\,\alpha\eta + \tfrac{1}{2}\,\eta\gamma, \eta\chi)$$

of

$$(\alpha\chi, \eta\chi) = (\tfrac{1}{4}\,\alpha\eta + \eta\gamma, \tfrac{1}{4}\,\alpha\eta + \tfrac{1}{2}\,\eta\gamma) = (\alpha\eta + 4\eta\gamma, \alpha\eta + 2\eta\gamma)$$

In de propositie 10 wordt alleen vermeld, dat men de stelling van Prop. 9 op dezelfde manier kan bewijzen voor een sphaeroidsegment; in Prop. 11, dat men ook den inhoud van een (recht)segment van een amblyconoide vinden kan (**C.S.** 25) en dat het zwaartecentrum van zulk een segment de as zoo verdeelt, dat het stuk aan den top tot het overblijvende stuk zich verhoudt als de som van het drievoud van de as en het achtvoud van de verlengde as (zie III; 6,22) tot de som van de as en het viervoud van de verlengde as.

8. In de laatste vier proposities van de *Methode* behandelt Archimedes den inhoud van den z.g. cylinderhoef, dat is het eerste der twee lichamen, die in den inleidenden brief vermeld zijn.

Propositie 12.

Indien in een recht prisma met quadratische bases een cylinder wordt beschreven, die zijn bases in de tegenover elkander gelegen vierkanten heeft en waarvan het oppervlak aan de vier andere vlakken raakt en er wordt door het centrum van den cirkel, die basis van den cylinder is, en een zijde van het overstaande vierkant een vlak gebracht, dan wordt door deze methode ingezien, dat de figuur, afgesneden door het aangebrachte vlak, het zesde deel van het geheele prisma is.

Laat in het bovenste deel van fig. 133 de rechthoek β de door-

snede van het prisma zijn met het vlak, dat de in de propositie vermelde zijde van het quadratische bovenvlak in β loodrecht middendoor deelt, γ het middelpunt van de basis, dus $\gamma\beta$ de doorsnede met het platte zijvlak van den hoef, $\varepsilon\zeta$ de doorsnede met het vlak, dat de hoogte $\gamma\delta$ loodrecht middendoordeelt, $\nu\upsilon$ de doorsnede met een veranderlijk vlak loodrecht op $\alpha\omega$. In de figuur is verder de doorsnede met het vlak $\varepsilon\zeta$ weergegeven. Het veranderlijke vlak $\nu\upsilon$ snijdt den hoef volgens een rechthoek, waarvan de zijden opv. gelijk zijn aan $\tau\sigma$ en aan $\nu\upsilon$, den cylinder volgens een rechthoek, waarvan de zijden opv. gelijk zijn aan $\tau\sigma$ en aan $\omega\beta$.

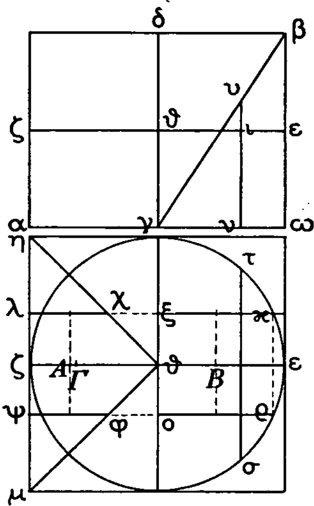


Fig. 133. *)

We beschouwen nu $\zeta\varepsilon$ als balans met steunpunt ϑ.

De figuur leert nu

$$(\varepsilon\vartheta,\ \vartheta\iota) = (\omega\gamma,\ \gamma\nu) = (\omega\beta,\ \nu\upsilon) = [\mathbf{O}\,(\omega\beta,\ \tau\sigma),\ \mathbf{O}\,(\nu\upsilon,\ \tau\sigma)]$$

Wegens $\vartheta\varepsilon = \vartheta\zeta$ staat hier te lezen, dat de rechthoekige doorsnede van het vlak $\nu\upsilon$ met den hoef, overgebracht naar ζ, evenwicht maakt met de rechthoekige doorsnede van het vlak $\nu\upsilon$ met den cylinder suo loco. We vinden dus als resultaat van Prop. 12, dat de hoef in ζ evenwicht maakt met den halven cylinder $\gamma\omega\beta\delta$ suo loco.

De behandeling wordt voortgezet in Prop. 13. Thans wordt beschouwd (fig. 133) een driezijdig prisma, waarvan $\mu\vartheta\eta$ de middendoorsnede is en dat dus een vierde deel is van het geheele prisma. Een stel veranderlijke vlakken parallel aan en aan weerskanten evenver verwijderd van het vlak $\alpha\omega\beta$ snijdt het driezijdig prisma volgens rechthoeken, voor elk waarvan de zijden opv. gelijk zijn aan $\lambda\chi$ $(= \psi\varphi)$ en aan $\gamma\delta$, den boven beschouwden halven cylinder volgens rechthoeken, voor elk waarvan de zijden opv. gelijk zijn aan $\varkappa\xi (= o\varrho)$ en aan $\gamma\delta$. Het eerste paar rechthoeken heeft A, het tweede paar B tot gemeenschappelijk zwaartecentrum, waarbij A

*) In de figuur is de letter π weggevallen bij het raakpunt met den cirkel van de horizontale raaklijn uit η en de letter Δ bij het andere uiteinde van de middellijn door π.

en B verkregen zijn door $\varepsilon\zeta$ opv. te snijden met de verbindingslijn van de middens van $\lambda\chi$ en $\psi\varphi$ en met die van de middens van $\xi\varkappa$ en $o\varrho$.

Nu is

$$[\mathbf{O}(\lambda\chi, \delta\gamma), \mathbf{O}(\varkappa\xi, \delta\gamma)] = (\lambda\chi, \varkappa\xi) = (\pi\xi, \varkappa\xi) = (\varkappa\xi, \xi\Delta) =$$
$$= (\varkappa\xi, \pi\xi + 2\vartheta\xi) = (\varkappa\xi, \lambda\chi + 2\chi\xi) = (2\vartheta B, 2\vartheta A) = (\vartheta B, \vartheta A).$$

Blijkbaar houden dus de prismadoorsnede en de cylinderdoorsnede elk suo loco elkander in evenwicht. Dus is ook het driezijdige prisma suo loco met den halven cylinder suo loco in evenwicht.

Dit combineerend met het resultaat van Prop. 12 ziet men in, dat het driezijdig prisma $\vartheta\eta\mu$ suo loco evenwicht maakt met den hoef in ε. Daar het zwaartecentrum Γ van het prisma zoo op $\vartheta\zeta$ ligt, dat

$$\vartheta\Gamma = \tfrac{2}{3}\,\vartheta\zeta \qquad \text{(lemma 9)}$$

volgt hieruit

$$\text{Hoef} = \tfrac{2}{3}.\ \text{Prisma}\ \vartheta\eta\mu = \tfrac{1}{6}.\ \text{Prisma}\ \alpha\omega\beta.$$

In Prop. 14 behandelt Archimedes opnieuw den inhoud van den in Prop. 12 ingevoerden cylinderhoef; hij vermijdt nu evenwichtsbeschouwingen, maar maakt nog wel gebruik van de opvatting van een lichaam als som zijner parallele doorsneden. Het bewijs voldoet dus nog niet aan den eisch van exactheid.

Ter verduidelijking geven we de redeneering in analytische inkleeding. In fig. 134 stelt het vierkant $\alpha\beta\gamma\delta$ het grondvlak van het prisma voor; het platte zijvlak van den hoef gaat door den diameter $\varepsilon\eta$ van de cylinderbasis en door het punt van het bovenvlak, waarvan ζ de orthogonale projectie op het grondvlak is. De bedoeling is nu, den hoef H te vergelijken met het driezijdig prisma P, waarvan $\varepsilon\eta$, $\delta\gamma$ en de ribbe van het bovenvlak, waarvan $\delta\gamma$ de orthogonale projectie op het grondvlak is, de opstaande ribben zijn. Dit geschiedt door vergelijking van de oppervlakten der doorsneden, die een veranderlijk vlak loodrecht op $\varepsilon\eta$ in beide lichamen bepaalt. Wanneer dit vlak het grondvlak van het prisma snijdt volgens $\mu\nu$ en den grondcirkel van den cylinder in ξ, bepaalt het in den hoef en in het prisma twee gelijkvormige driehoeken, waarvan $\mu\xi$ en $\mu\nu$ homologe zijden zijn. Hieruit volgt:

$$(\text{doorsnede van } P, \text{ doorsnede van } H) = [\mathbf{T}(\mu\nu), \mathbf{T}(\mu\xi)].$$

Construeer nu op $\mu\nu$ een punt λ, zoodat

$$[\mathbf{T}(\mu\nu), \mathbf{T}(\mu\xi)] = (\mu\nu, \mu\lambda)$$

of (III; 0, 31) $(\mu\nu,\ \mu\xi) = (\mu\xi,\ \mu\lambda)$

of

$$\mathbf{T}\ (\mu\xi) = \mathbf{O}\ (\mu\nu,\ \mu\lambda).$$

Is nu σ de projectie van λ op $\vartheta\zeta$, dan staat hier

$$\mathbf{T}\ (\varkappa\zeta) - \mathbf{T}\ (\lambda\sigma) = \mathbf{O}\ (\varkappa\zeta,\ \varkappa\zeta - \zeta\sigma) = \mathbf{T}\ (\varkappa\zeta) - \mathbf{O}\ (\varkappa\zeta,\ \zeta\sigma)$$

dus

$$\mathbf{T}\ (\lambda\sigma) = \mathbf{O}\ (\varkappa\zeta,\ \zeta\sigma)$$

De meetkundige plaats van λ is dus een orthotome met top ζ, diameter $\zeta\vartheta$ en orthia $\varkappa\zeta$.

Bekend is nu

(doorsnede van *P*, doorsnede van *H*) $= (\mu\nu,\ \mu\lambda)$.

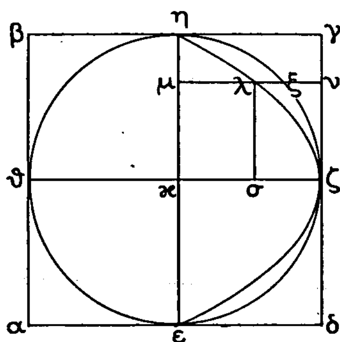


Fig. 134.

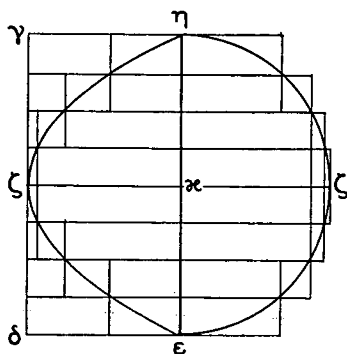


Fig. 135.

De inhouden van het prisma P en van den hoef H, zijnde de sommen hunner parallele doorsneden, verhouden zich nu als de sommen der stukken $\mu\nu$ en $\mu\lambda$, dus als de oppervlakten van den rechthoek $\varepsilon\delta\gamma\eta$ en het segment der orthotome $\varepsilon\zeta\eta$. Volgens de hoofdstelling van *Quadratuur van de Parabool* is deze verhouding 3 : 2. Hieruit volgt, dat de inhoud van den hoef *H* twee derde is van dien van het driezijdig prisma *P* en dus een zesde van dien van het om den cylinder beschreven regelmatige vierzijdige prisma.

In Propositie 15 wordt voor de derde maal het probleem van den inhoud van den cylinderhoef gesteld. Thans wordt echter een exacte geometrische behandeling gegeven, waarin de opvatting van een inhoud als som van oppervlakten van parallele doorsneden is losgelaten en waarin de methode van den indirecten grensovergang wordt toegepast.

Gebruikt wordt de verschilvorm der compressiemethode (III; 8,21): in en om den hoef worden figuren geconstrueerd, bestaande uit achter elkaar geplaatste driezijdige prismata en er wordt nu eerst aangetoond, dat het verschil van de inhouden van het omgeschreven lichaam C_n en van het ingeschreven lichaam I_n door keuze van het aantal schijven kleiner kan worden gemaakt dan een willekeurig voorgeschreven inhoud.

In fig. 135 is weer het grondvlak van den hoef in teekening gebracht. Op den diameter $\varepsilon\eta$ wordt dichotomie toegepast en door de deelpunten worden vlakken loodrecht op $\varepsilon\eta$ aangebracht, die elk den hoef volgens een driehoek snijden. De figuur toont verder van elk der in- en omgeschreven driezijdige prismata het zijvlak, waarmee het op het grondvlak van den cylinder steunt. Het blijkt, dat het verschil $C_n—I_n$ gelijk is aan de som van de inhouden der twee aan $\varkappa\zeta$ grenzende omgeschreven prismata, welke som door keuze van n kleiner kan worden gemaakt dan een voorgeschreven bedrag. Het is verder duidelijk, dat de aangebrachte vlakken het prisma P verdeelen in gelijke driezijdige prismata p_n. Stel nu, dat de inhoud van den hoef H niet gelijk is aan twee derde van den inhoud van het prisma P. Dan is $H \gtrless \frac{2}{3} P$.

Geval I. Zij $H > \frac{2}{3}P$. Zet de dichotomie van $\varepsilon\eta$ voort, totdat

$$C_n - I_n < H - \tfrac{2}{3} P$$

dan is, wegens $C_n > H$

$$I_n > \tfrac{2}{3} P \qquad \text{of} \qquad P < \tfrac{3}{2} I_n.$$

Nu is in Prop. 14 voor een snijvlak loodrecht op $\varepsilon\eta$ bewezen (fig. 134):

$$\begin{aligned}(\mu\nu, \mu\lambda) &= (\text{doorsnede van } P, \text{ doorsnede van } H)\\ &= (p_n, \text{ ingeschreven prisma van } H). \qquad (1)\end{aligned}$$

Nu bepalen de rechten, die door de deelpunten van $\varepsilon\eta$ loodrecht op $\varepsilon\eta$ getrokken zijn ook op de in Prop. 14 ingevoerde orthotome O punten, die op de in fig. 135 (waar de kromme gemakshalve links van $\varepsilon\eta$ geteekend is) aangegeven wijze hoekpunten zijn van om- en ingeschreven rechthoeken der orthotome. We noemen de figuur der omgeschreven rechthoeken c_n, die der ingeschrevene i_n. Tevens verdeelen de aangebrachte lijnen den rechthoek Φ $(\varepsilon\delta\gamma\eta)$ in n gelijke rechthoeken φ_n. Men heeft nu

$(\mu\nu, \mu\lambda) = (\varphi_n,$ ingeschreven rechthoek van $O)$

dus door vergelijking met (1):

$(p_n,$ ingeschreven prisma van $H) = (\varphi_n,$ ingeschreven rechthoek van $O)$

dus (III; 7, 21):

$$(P, I_n) = (\Phi, i_n) \tag{2}$$

Nu is bekend

$$\Phi = \tfrac{3}{2}.\text{ segment der orthotome } \varepsilon\zeta\eta > \tfrac{3}{2}\, i_n \tag{3}$$

Echter is

$P < \frac{3}{2} I_n$, dus volgt uit (2):

$$\Phi < \tfrac{3}{2}\, i_n$$

in strijd met (3).

Op analoge wijze blijkt, dat ook de onderstelling $H < \frac{2}{3} P$ tot een contradictie voert.

Hiermee eindigt het bewaard gebleven deel van de *Methode,* waarvan het manuscript hier en daar al aanzienlijke, zij het ook naar inhoud gemakkelijk aan te vullen lacunes vertoont. De afleiding van de in het inleidend schrijven vermelde stelling omtrent het lichaam, bepaald door de doorsnijding van twee in een kubus beschreven cylinders, ontbreekt. Het blijkt niet moeilijk te zijn, haar hypothetisch te reconstrueeren; we zullen hierop echter niet ingaan [17]).

---

[17]) Men vindt zulk een reconstructie o.a. bij T. L. Heath, *The Method of Archimedes* (Cambridge 1912), 48 seq. en bij E. Rufini, *Il "Metodo„ di Archimede e le origini dell'analisi infinitesimale nell' Antichità (Per la Storia e la Filosofia delle Matematiche* No. 4, Roma 1926). p. 179—186.

HOOFDSTUK XI.

QUADRATUUR VAN DE PARABOOL.

1. De stelling over den inhoud van den cylinderhoef gaf ons reeds gelegenheid, om te zien, hoe Archimedes van een langs mechanischen weg met behulp van de methode der indivisibilia verworven vermoeden kwam tot een mathematisch bewijs, dat eerst al zijn eischen van exactheid bevredigde.

Een nog veel schooner voorbeeld van zulk een logische beveiliging van een langs intuitieven weg verkregen inzicht levert ons de stelling over de oppervlakte van een segment eener orthotome, die het onderwerp van de eerste propositie der *Methode* vormde. Aan het mathematische bewijs van deze stelling heeft Archimedes namelijk een afzonderlijk werk gewijd, de *Quadratuur van de Parabool,* waarin hij in groote uitvoerigheid langs twee verschillende wegen het reeds bekende resultaat logisch afleidt en wel eerst nog met behulp van mechanische beschouwingen en daarna zuiver geometrisch. Zooals we boven reeds opmerkten, kan aan deze tweeledigheid der verhandeling een argument worden ontleend voor de opvatting, dat wanneer Archimedes aan de mechanische methode, die hij voor Eratosthenes uiteenzet, bewijskracht ontzegt, hij dit niet doet op grond van haar mechanisch karakter, maar uitsluitend wegens het gebruik, dat zij van de beschouwingswijze der indivisibilia maakt.

2. Het werk *Quadratuur van de Parabool* begint met vijf proposities over eigenschappen der orthotome, die we reeds in Hoofdstuk III hebben verwerkt. Daarop volgen acht proposities, waarin gelijkheden en ongelijkheden over vlakke aan een balans opgehangen figuren worden uitgesproken.

In de Prop. 6 en 7 hangt (fig. 136) aan het eene uiteinde A van een in zijn midden B ondersteunde balans $A\Gamma$ een grootheid Z in evenwicht met een driehoek $\Gamma H\Delta$, waarvan de zijde $H\Delta$ in de verticaal van B ligt (in Prop. 6 bovendien H in B). Is Θ

het zwaartecentrum van den driehoek en snijdt de verticaal van Θ de rechte $B\Gamma$ in Π, dan is wegens $B\Pi = \frac{1}{3} B\Gamma$

$$\triangle \Gamma H \Delta = 3Z$$

Archimedes wijkt hier af van de in *Evenwichten van vlakke figuren* gevolgde methode, de opgehangen grootheden in hun zwaartecentrum aan de balans te bevestigen; de zwaartecentra liggen thans op een lager niveau dan de balans zelf. Het is niet geheel in den haak, dat hij niettemin de proposities uit *Evenwichten* toepast.

De proposities 8—12 zijn alle bijzondere gevallen van Prop. 13,

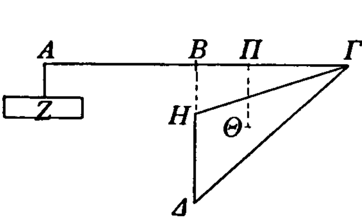


Fig. 136.

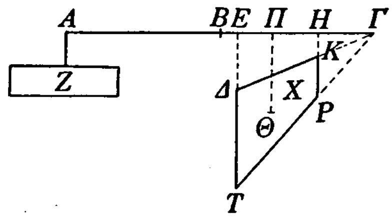


Fig. 137.

die we daarom alleen behandelen (fig. 137). Hier hangt aan $B\Gamma$ een trapezium X ($TPK\Delta$), waarvan de verticale evenwijdige zijden, ΔT en KP, $B\Gamma$ opv. snijden in E en H, terwijl de andere zijden ΔK en TP convergeeren naar Γ. De verticaal door het zwaartecentrum Θ snijdt $B\Gamma$ in Π Er is evenwicht tusschen Z en X. Hieruit volgt

$$(AB, B\Pi) = (X, Z) \qquad (1)$$

We beschouwen nu de grootheden M en N, die in plaats van Z in A zouden moeten hangen, om evenwicht met X te maken, wanneer X zoo aan $B\Gamma$ werd bevestigd, dat de verticaal van Θ opv. door E en door H ging. M en N worden bepaald door

$$(AB, BE) = (X, M)$$
$$(AB, BH) = (X, N)$$

Daar $BE < B\Pi < BH$, vinden we door vergelijking van deze evenredigheden met (1) als resultaat

$$M < Z < N$$

Hierdoor wordt dus uitgesproken, dat de grootheid in A, die evenwicht maakt met X, kleiner wordt, als men X naar het steunpunt B toe, grooter, als men X van het steunpunt B af verplaatst.

In Prop. 12 viel Δ in E en K in H, in Prop. 11 E in B, in Prop. 10 bovendien Δ in E; in Prop. 8 en 9 vielen P, K, H samen in Γ zoodat het trapezium overging in een driehoek; de grootheid N (die nu gelijk zou zijn aan X) wordt in deze proposities niet beschouwd.

Hierna volgt het bewijs van de hoofdstelling, dat de proposities 14—17 in beslag neemt. Ter wille van de overzichtelijkheid vatten we den inhoud der proposities 14 en 16 in de volgende redeneering samen:

3. Een segment van een orthotome, waarvan een koorde $B\Gamma$ loodrecht op den diameter staat (fig. 138), is langs de koorde aan de balans $A\Gamma$, die in zijn midden B ondersteund wordt, bevestigd.

Fig. 138.

De raaklijn in Γ snijdt de lijn, die door B parallel met den diameter getrokken is, in Δ. $B\Delta$ is in een nader te bepalen aantal n gelijke deelen, BE, EH enz. verdeeld. De deelpunten zijn met Γ verbonden en door de punten, waarin deze verbindingslijnen de kromme ontmoeten, zijn rechten parallel aan den diameter getrokken, die $B\Gamma$ ontmoeten in de punten M, N......, $\Gamma\Delta$ in de punten α, β, γ...... De stukken BM, MN...... zijn nu ook onderling gelijk (zie Opmerking). Er ontstaan nu in de figuur verschillende trapezia, waarvan we drie verschillende soorten nader onderscheiden.

1. de trapezia $B\alpha$, $M\beta$, ..., die we deeltrapezia van $\triangle B\Gamma\Delta$ noemen; aan te duiden door d_1, d_2, ... d_n.

2. de trapezia EM, ΦN, ..., die we omgeschreven trapezia van het segment noemen; aan te duiden door c_1, c_2, ... c_n; samen vormen ze de figuur C_n.

3. de trapezia ΩN, $P\Xi$, ..., die we ingeschreven trapezia van het segment noemen; aan te duiden door i_2, i_3, ... i_n; samen vormen ze de figuur I_n. Het is duidelijk, dat c_n en i_n driehoeken zijn met hoekpunt Γ.

De afleiding wordt gegeven met behulp van den verschilvorm der compressiemethode (III; 8,21); daartoe is noodig, dat het verschil $C_n - I_n$ door keuze van n kleiner kan worden gemaakt dan een willekeurig voorgeschreven grootheid. Nu bestaat $C_n - I_n$ uit de trapezia EM, $\Phi\Lambda$, ... Hiervoor geldt

$$\Phi\Lambda = \Omega N \text{ enz.}$$

Immers uit $BE = EH$ volgt $M\Omega = \Omega\Phi$ en $N\Lambda = \Lambda P$ enz.

Het verschil $C_n - I_n$ is dus gelijk aan $\triangle \Gamma BE$ en is dus inderdaad door keuze van n kleiner te maken dan een willekeurig voorgeschreven grootheid.

Er moet nu bewezen worden, dat het segment $B\Theta\Gamma$ gelijk is aan $\frac{1}{3} \cdot \triangle B\Delta\Gamma$. Dit geschiedt volgens het beginsel der compressiemethode door het bestaan van de ongelijkheid

$$I_n < \tfrac{1}{3} \cdot \triangle B\Delta\Gamma < C_n \qquad (1)$$

aan te toonen. Is dit eenmaal bewezen, dan volgt het gestelde op de gebruikelijke wijze, omdat het segment dan met $\frac{1}{3} \triangle B\Delta\Gamma$ tusschen grenzen ligt, waarvan het verschil kleiner kan worden gemaakt dan een willekeurig voorgeschreven grootheid.

Om de ongelijkheid (1) aan te toonen, worden (in Prop. 14) evenwichtsbetrekkingen tusschen de verschillende boven onderscheiden trapezia afgeleid. Wegens de stelling **Q.P.** 5 (III; 2,7) heeft men

$$(\alpha\Omega, \Omega M) = (\Gamma M, BM)$$

dus

$$(\alpha M, \Omega M) = (B\Gamma, BM) = (AB, BM)$$

Evenzoo

$$(\beta N, PN) = (AB, BN)$$

Nu is

$$(d_1, c_1) = (\Delta B + \alpha M, EB + \Omega M)$$

Daar echter

$$(\Delta B, EB) = (\alpha M, \Omega M) = (\Delta B + \alpha M, EB + \Omega M)$$
$$(AB, AH) = (X, N)$$

is ook

$$(d_1, c_1) = (\varDelta B, EB) = (\alpha M, \Omega M)$$

Evenzoo ziet men in

$$(d_2, c_2) = (\alpha M, \Phi M) = (\beta N, PN) \text{ enz.}$$

Echter ook

$$(d_2, i_2) = (\alpha M, \Omega M) = (\beta N, \Lambda N) \text{ enz.}$$

Hieruit volgt

$$(d_1, c_1) = (d_2, i_2) = (\varDelta B, EB)$$

Daar nu uit

$$EB = EH \text{ enz.}$$

volgt

$$BM = MN \text{ enz.}$$

is

$$(\varDelta B, EB) = (\Gamma B, MB)$$

dus

$$(d_1, c_1) = (\Gamma B, MB) = (AB, BM)$$

Evenzoo

$$(d_2, c_2) = (d_3, i_3) = (AB, BN)$$

Hieruit blijkt:

c_1 in A maakt evenwicht met d_1 in M
c_2 in A maakt evenwicht met d_2 in N enz.

en ook:

i_2 in A maakt evenwicht met d_2 in M
i_3 in A maakt evenwicht met d_3 in N enz.

We denken nu in A opgehangen de grootheden $\varDelta_1, \varDelta_2, \ldots\ldots$, die opv. evenwicht maken met $d_1, d_2, \ldots\ldots$ suis locis. Wegens de proposities 8, 10 en 12 geldt nu

$$c_k > \varDelta_k \quad (k = 1 \ldots . n)$$
$$i_k < \varDelta_k \quad (k = 2 \ldots . n)$$

Hieruit volgt

$$i_2 + \ldots . + i_n < \varDelta_1 + \ldots . + \varDelta_n < c_1 + \ldots . + c_n$$

of

$$I_n < \varDelta_1 + \ldots . \varDelta_n < C_n$$

Echter is wegens Prop. 6

$$3\,(\varDelta_1 + \ldots . + \varDelta_n) = \triangle B\varDelta\Gamma$$

waaruit de verlangde ongelijkheid

$$I_n < \tfrac{1}{3} \,.\, \triangle B\Delta\Gamma < C_n \qquad (1)$$

volgt.

Het verdere verloop der redeneering (in Prop. 16) volgt nu automatisch.

Is het segment $B\Theta\Gamma$ niet gelijk aan $\frac{1}{3} \,.\, \triangle B\Delta\Gamma$, dan is het òf grooter òf kleiner.

Geval I. Zij

$$\text{segment } B\Theta\Gamma > \tfrac{1}{3} \,.\, \triangle B\Delta\Gamma$$

Bepaal nu n zoo, dat

$$C_n - I_n < \triangle BE\Gamma < \text{segment } B\Theta\Gamma - \tfrac{1}{3} \,.\, \triangle B\Delta\Gamma$$

dan is a fortiori

$$\text{segment } B\Theta\Gamma - I_n < \text{segment } B\Theta\Gamma - \tfrac{1}{3} \,.\, \triangle B\Delta\Gamma$$

dus

$$I_n > \tfrac{1}{3} \,.\, \triangle B\Delta\Gamma$$

in strijd met (1).

Geval II. Zij

$$\text{segment } B\Theta\Gamma < \tfrac{1}{3} \,.\, \triangle B\Delta\Gamma$$

Bepaal nu n zoo, dat

$$C_n - I_n < \triangle BE\Gamma < \tfrac{1}{3} \,.\, \triangle B\Delta\Gamma - \text{segment } B\Theta\Gamma$$

dan is a fortiori

$$C_n - \text{segment } B\Theta\Gamma < \tfrac{1}{3} \,.\, \triangle B\Delta\Gamma - \text{segment } B\Theta\Gamma$$

dus

$$C_n < \tfrac{1}{3} \,.\, \triangle B\Delta\Gamma$$

in strijd met (1).

Opmerking: Het is blijkbaar essentieel voor het bewijs, dat uit de gelijkheid der stukken BE enz. van $B\Delta$ de gelijkheid der stukken BM, MN enz. van $B\Gamma$ volgt. Nu begint Archimedes in Prop. 14, waarin hij de ongelijkheid (1) afleidt, met de laatstgenoemde gelijkheid te onderstellen en hij past dan Prop. 14 toe in Prop. 16, waarin niet $B\Gamma$, maar $B\Delta$ in een aantal gelijke deelen verdeeld wordt, zonder dat hij bewijst, dat hierdoor ook de voorwaarde van Prop. 14 vervuld is. Deze kleine lacune wordt natuurlijk aangevuld door op te merken, dat volgens **Q.P.** 5 (III; 2, 7)

$$(\Gamma M,\ BM) = (\alpha\Omega,\ \Omega M) = (\Delta E,\ EB)$$

zoodat BM het n^e deel van $B\Gamma$ blijkt te zijn, wanneer BE het van $B\Delta$ is. Zoo voortgaande, ziet men in: $BM = MN$ enz.

In Prop. 15 wordt de ongelijkheid (1) bewezen voor het geval, dat de koorde van het segment niet loodrecht op den diameter staat. Het wordt nu zoo aan de balans bevestigd, dat de diameter verticaal staat, het eene uiteinde van de koorde in Γ ligt en het andere in de verticaal van B. De redeneering wordt er nauwelijks anders door. Men moet zich alleen beroepen op de Prop. 7, 9, 11 en 13 inplaats van op 6, 8, 10 en 12.

In Prop. 17 wordt ten slotte de stelling uitgesproken in den vorm, waarin Archimedes haar pleegt toe te passen:

Propositie 17.

Dit bewezen zijnde, is het duidelijk, dat ieder segment, dat omvat wordt door een rechte en een orthotome een derde grooter is dan de driehoek, die dezelfde basis heeft als het segment en gelijke hoogte.

Hierin (fig. 139) beduidt „hoogte" den afstand tot de koorde $B\Gamma$ van het punt Θ (top), waar de raaklijn parallel is met de koorde. Blijkbaar is

$$B\Delta = 2 \, . \, ZE = 4 \, . \, Z\Theta$$

dus

$$\text{segment } B\Theta\Gamma = \tfrac{1}{3} \triangle B\Delta\Gamma = \tfrac{4}{3} \triangle B\Theta\Gamma$$

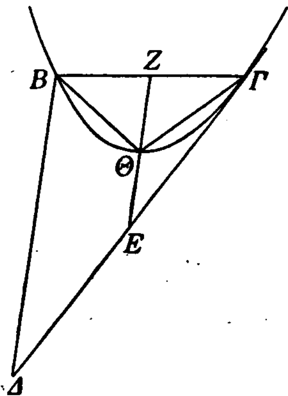


Fig. 139.

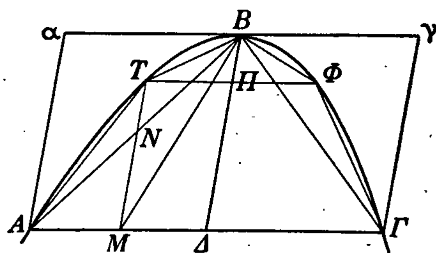


Fig. 140.

Na Prop. 17 volgen nog definities van de termen basis, hoogte en top van het segment, die echter in Prop. 17 al gebruikt zijn. De

hoogte wordt nu gedefinieerd als grootste afstand van een punt van den tak $B\Gamma$ der kromme tot de basis, de top als het punt, dat dien grootsten afstand tot de basis heeft. In Prop. 18 wordt bewezen, dat de top het punt is, waar de rechte door het midden van de koorde parallel met den diameter de kromme snijdt.

4. Met Prop. 18 is reeds de tweede afdeeling van het werk begonnen, waarin Archimedes de stelling over de oppervlakte van een segment eener orthotome nog eens langs zuiver geometrischen weg bewijst. Hij past hier dien vorm van indirecten limietovergang toe, dien we in de algemeene bespreking als approximatiemethode hebben aangeduid (III; 8,30). Hij beschrijft dus in het segment een figuur, welker oppervlakte meer dan de helft van die van het segment is, handelt met het overblijvende deel evenzoo en benadert daardoor wegens het lemma van Euclides de te bepalen oppervlakte zoo fijn als verlangd wordt.

We vatten in het volgende den inhoud der Prop. 19—24 samen (fig. 140). Laat Σ het segment $AB\Gamma$ der orthotome zijn met basis $A\Gamma$ en top B. Construeer het parallelogram $A\Gamma\gamma\alpha$ met zijde $A\Gamma$, waarvan de overstaande zijde door B gaat, dan blijkt in Prop. 20:

$$\triangle\, AB\Gamma = \tfrac{1}{2}\, A\Gamma\gamma\alpha > \tfrac{1}{2}\,\Sigma.$$

Daar men met elk der segmenten AB, $B\Gamma$ evenzoo kan handelen, is het lemma van Euclides van toepassing (Prop. 20; Corollarium). Beschouw thans den ingeschreven driehoek (verg. III; 2,4) ATB van het segment AB. De top T ligt op de rechte, die door het midden N van AB parallel met den diameter, dus parallel met $B\Delta$ is getrokken; deze rechte gaat dus ook door het midden M van $A\Delta$. Trek nog BM. We willen nu de driehoeken $AB\Gamma$ en ABT vergelijken.

Daartoe wordt eerst bewezen (Prop. 19):

$$B\Delta = \tfrac{4}{3}\, TM.$$

Dit volgt uit het symptoom der orthotome; snijdt nl. de rechte door T parallel met $A\Gamma$ in Π de rechte $B\Delta$, dan is

$$(B\Delta,\ B\Pi) = [\mathbf{T}\,(A\Delta),\ \mathbf{T}\,(T\Pi)] = [\mathbf{T}\,(A\Delta),\ \mathbf{T}\,(M\Delta)]$$

dus

$$B\Delta = 4\,.\,B\Pi$$

dus

$$TM = \Pi\Delta = \tfrac{3}{4}\, B\Delta.$$

Daar nu $NM = \frac{1}{2} B\Delta$, blijkt $NM = 2 . TN$.
Hieruit volgt

$$\triangle ABT = 2 . \triangle BNT = \triangle BNM = \tfrac{1}{2} \triangle ABM = \tfrac{1}{8} \triangle AB\Gamma$$

(Prop. 21).

Stellen we nu de oppervlakte van $\triangle AB\Gamma$ voor door Z, dan is de som der oppervlakten van de twee driehoeken, beschreven in de segmenten AB en $B\Gamma$, $Z_1 = \frac{1}{4} Z$; zoo voortgaande vindt men voor de som van de oppervlakten der driehoeken, die in de overblijvende vier segmenten beschreven worden, $Z_2 = \frac{1}{4} Z_1$ enz. Archimedes drukt dit uit door grootheden H, Θ, I enz. in te voeren, zoodat

$$H = \tfrac{1}{4} Z,\ \Theta = \tfrac{1}{4} H,\ I = \tfrac{1}{4} \Theta$$

Hierdoor is bewezen (Prop. 22).

$$\Sigma > Z + H + \Theta + I$$

of algemeen

$$\Sigma > Z + Z_1 + \ldots\ldots + Z_{n-1}.$$

In Prop. 23 wordt nu een hulpstelling over de som van een meetkundige reeks met reden $\frac{1}{4}$ afgeleid. Volgens deze stelling (behandeld III; 7,60) is

$$Z + H + \Theta + I + \tfrac{1}{3} I = \tfrac{4}{3} Z \qquad (1)$$

of algemeen

$$Z + Z_1 + \ldots . + Z_{n-1} + \tfrac{1}{3} Z_{n-1} = \tfrac{4}{3} Z \qquad (2)$$

Hierna volgt nu in Prop. 24 het bewijs van de hoofdstelling. Zij $K = \frac{4}{3} Z$ dan is te bewijzen $\Sigma = K$. Zij dit onjuist, dan is òf $\Sigma > K$ òf $\Sigma < K$.

Geval I. Zij $\Sigma > K$. Ga nu met het beschrijven van driehoeken in de telkens verkregen segmenten zoolang voort, tot de som I_n van alle ingeschreven driehoeken voldoet aan

$$\Sigma - I_n < \Sigma - K \qquad \text{(lemma van Euclides III; 0,5)}$$

dus

$$I_n > K$$

Archimedes onderstelt, dat dit het geval is voor $n = 4$ en schrijft dan

$$Z + H + \Phi + I > K$$

wat in strijd is met (1).

Meer algemeen vindt men

$$Z + Z_1 + \ldots . + Z_{n-1} > K \qquad \text{in strijd met (2).}$$

Geval II. Zij $\Sigma < K$. We kunnen nu niet, zooals bij de compressiemethode, geheel analoog aan Geval I redeneeren, omdat er geen som C_n van omgeschreven figuren voorkomt. Archimedes zet nu het beschrijven van driehoeken voort, totdat de som van de in laatste instantie verkregen oppervlakten voldoet aan

$$I < K - \Sigma \qquad (3)$$

Men heeft verder

$$K - (Z + H + \Theta + I) = \tfrac{1}{3} I < I$$

dus

$$I > K - I_n > K - \Sigma \qquad \text{in strijd met (3).}$$

Algemeen krijgt men

$$Z_{n-1} < K - \Sigma \qquad (4)$$

Daar nu

$$Z + Z_1 + \ldots . Z_{n-1} + \tfrac{1}{3} Z_{n-1} = K$$

is ook

$$K - (Z + Z_1 + \ldots . + Z_{n-1}) = \tfrac{1}{3} Z_{n-1} < Z_{n-1}$$

dus

$$Z_{n-1} > K - I_n$$

en a fortiori

$$Z_{n-1} > K - \Sigma \qquad \text{in strijd met (4).}$$

NOGMAALS: „DE REKENKUNDIGE DENKBAARHEDEN IN LOGISCHE SAMENHANG" [1]).

Drie jaar geleden publiceerde ik in Euclides Jg. 13 (blz. 128) een „Korrel", behelzende enkele passages uit „De Rekenkundige Denkbaarheden in Logische Samenhang" door P. J. Bouman en J. C. van Zelm met de vraag, wie van de lezers aan het geciteerde een redelijke wiskundige zin kon hechten, en met de verzuchting, dat dergelijke uitlatingen het bestaan van hardnekkige en verspreide misverstanden over de wiskunde begrijpelijk konden maken. In Valcooch (5 Mei 1937) heeft toen Wijdenes in een kort artikel mijn beschouwingen overgenomen en zich bovendien minder waarderend over de rekenmethode van de heren Bouman en Van Zelm uitgelaten.

Zo juist ontving ik van de heren Bouman en Van Zelm een „Beroep op het wetenschappelijk geweten van den Heer Wijdenes", waarin zij tegen het door Wijdenes en mij geschrevene bezwaar maken. Het is daarom wellicht goed, dat ik mijnerzijds nog eens op de zaak terugkom, teneinde mijn opvatting nader toe te lichten, waarbij ik in het bijzonder een aantal door de schrijvers in hun brochure opgeworpen kwesties wil bespreken.

1. Mijn door Wijdenes gepubliceerde uitlating: „het lijkt mij volslagen onmogelijk een rekenmethode voor de lagere school te baseren op zulke wanbegrippen" (blz. 8 r. 14). Met deze opmerking bedoelde ik géén beoordeling van de rekenmethode van de heren Bouman en Van Zelm en ik wil er met nadruk op wijzen, dat ik ook nu alléén de door genoemde heren aan hun methode ten grondslag gelegde theoretisch-wijsgerige denkbeelden in het geding wil brengen. Derhalve wil ik a priori de mogelijkheid niet

---

1) Zie blz. 45 onderaan.

buitensluiten, dat hun methode uit een practisch-onderwijskundig oogpunt bezien voortreffelijke hoedanigheden zou bezitten. Maar dan zouden die volkomen onafhankelijk zijn van de m.i. onhoudbare theoretische fundering.

2. „Welke denkbeelden moet de lectuur van een dergelijk boek bij den argelozen lezer verwekken" (blz. 6 r. 13)? De heren Bouman en Van Zelm maken de tegenwerping dat zij niet voor argeloze lezers hebben geschreven; dit lijkt mij niet juist.

Een argeloos lezer is ieder, wiens kritisch vermogen niet vooraf is geschoold door wijsgerige studie en die niet beschikt over een grondige en goed gefundeerde kennis van de beginselen der rekenkunde, zoals die b.v. kan worden verkregen door kennisneming van Schuh's „Het natuurlijke getal". De lectuur van een werk als dit brengt den lezer op een niveau van abstract-logisch redeneren, vanwaar hij zonder moeite de dialectiek van de heren Bouman en Van Zelm als een machteloos pogen doorziet.

Nu verschaft bij mijn weten de onderwijzersopleiding noch een wijsgerige scholing, noch een wiskundige kennis, als hier wordt bedoeld (wat ook niemand van die opleiding zal kunnen eisen), en dus zijn de onderwijzers over het algemeen in de door mij bedoelde zin als argeloze lezers te beschouwen.

Daar de methode Bouman en Van Zelm veel wordt gebruikt, zullen ook vele onderwijzers het hier besproken werk van de heren Bouman en Van Zelm ter hand hebben genomen. Ik kan moeilijk aannemen, dat dit de bedoeling van de schrijvers *niet* is geweest, en ik moet hen dan ook voor het misverstand, dat door hun werk mocht zijn teweeggebracht, in vollen omvang verantwoordelijk stellen.

3. De heren Bouman en Van Zelm spreken (blz. 3 r. 18) het vertrouwen uit, dat ik hun werk nog eens zal willen toetsen, en stellen mij (blz. 7 r. 29) voor, hun laatste publicatie („Algebraïsche getallen en grootheden") te vergelijken met de werken van Wijdenes. Aan die wens wil ik dan ook bij dezen gaarne gehoor geven.

In bedoeld werk (blz. 11) laten de schrijvers op een in grote trekken bevredigende invoering van het getal 0 en van de negatieve getallen volgen:

„Men dele de leerlingen mede, dat men bij *plus* 4 denkt aan iets *positiefs*, aan iets, dat bestáát: *plus* 4 wordt een *positief* getal

genoemd. Als men nu het tegengestelde denkt van het positieve getal, wanneer men dus het positieve getal ontkent, negéért, dan denkt men om te beginnen aan de zuivere ontkenning van het positieve getal, aan *niets,* dat met het teken 0 wordt aangeduid. Daarop volgt de gedachte aan iets *negatiefs,* aan iets, dat eigenlijk *niet* als bestaande wordt gedacht: *min* 4 wordt nu een *negatief* getal genoemd."

De bedoelde mededeling is wel een der gevaarlijkste, die men den leerlingen kan doen. Men wekt er de gedachte mee, dat negatieve getallen eigenlijk getallen van minder allooi zijn, en helpt zo een oud misverstand in zwang houden. Reeds in 1544 duidde Stifel de negatieve getallen als *numeri absurdi* aan. De bedoelde opvatting (die terugkeert bij de behandeling van de onmeetbare getallen, door de schrijvers immers aangeduid als „getallen, die geen getallen zijn") is overigens met het eigen beginsel van de schrijvers niet in overeenstemming. Zij beschouwen immers m.i. terecht de getallen als *denkbaarheden,* en denkbaarheid komt aan de negatieve en de onmeetbare getallen in geen mindere mate toe dan aan de positieve, meetbare getallen. [1])

Men beschouwe nu eens de overeenkomstige passages in de „Beknopte Rekenkunde" van Wijdenes. Zonder dat daarop uitdrukkelijk behoeft te worden gewezen, blijkt uit de gehele behandeling, dat de niet-positieve getallen geheel gelijkwaardig zijn met de positieve.

In de beide beschouwde werken volgt nu de behandeling van de optelling. Bij Wijdenes komt duidelijk uit, dat de optelling na

---

[1]) De vraag, of een bepaald getal of een bepaald soort getallen „bestáát", doet zich niet voor binnen de wiskunde zelf, maar treedt eerst op, wanneer men de wiskunde op bepaalde practische problemen gaat toepassen.

Vindt men b.v. bij het oplossen van vraagstukken, dat zich in een kamer een negatief of gebroken aantal personen zou bevinden, dat iemand een onmeetbaar aantal guldens moet uitbetalen, of dat de lengte van een of ander lijnstuk door een imaginair getal moet worden aangegeven, dan heeft men die oplossingen als onmogelijk te verwerpen. In al deze gevallen is niet het *getal,* dat als oplossing van het vraagstuk wordt gevonden, maar alleen de aan dat getal beantwoordende concrete *hoeveelheid* ondenkbaar, en die hoeveelheid bestaat dus niet. Het antwoord op de hierboven bedoelde vraag hangt blijkbaar nog af van den aard van het practische probleem, dat men zich stelt.

invoering van de niet-positieve getallen opnieuw dient te worden gedefiniëerd. Bij de heren Bouman en Van Zelm daarentegen schijnt het alsof regels als

$$(-p) + (-q) = -(p+q) \qquad (p, q > 0)$$

door den leerling zouden kunnen worden *beredeneerd* zonder voorafgaande definitie van de optelling.

Men beschouwe verder de nu in beide boeken volgende behandeling van de aftrekking. Bij Wijdenes staat terecht de opvatting van de aftrekking als omkering van de optelling op de voorgrond. Gemakkelijk toont hij aan, dat de aftrekking na invoering van de niet-positieve getallen onbeperkt uitvoerbaar is. De heele behandeling van de aftrekking beslaat slechts een halve bladzij.

Bij de heren Bouman en Van Zelm worden daarentegen alle tekencombinaties voor aftrekker en aftrektal afzonderlijk beschouwd (wat bij de optelling inderdaad nodig is, maar bij de aftrekking achterwege kan blijven); de onbeperkte uitvoerbaarheid van de aftrekking — n.b. de eigenlijke *raison* van de invoering der niet-positieve getallen — komt echter bij hen niet ter sprake. Evenmin de opvatting van de aftrekking als omkering van de optelling.

Tenslotte wijs ik op de door de heren Bouman en Van Zelm gebruikte formulering: „We mogen de twee leden der vergelijking met een getal vermeerderen of verminderen, met een getal vermenigvuldigen of door een getal delen" („Algebraische getallen en grootheden", blz. 54 r. 15), die alleen de eerste maal, dat ze voorkomt (l.c. blz. 47) eenigszins correct mag heten door de toevoeging: „in alle gevallen blijft het eerste lid gelijk aan het tweede".

Een correcte behandeling van deze kwestie vindt men in Wijdenes en Beth, „Nieuwe School Algebra" I, 12de druk, blz. 76.

De door de heren Bouman en Van Zelm voorgestelde vergelijking van hun werk met dat van Wijdenes valt volkomen in het voordeel van den laatste uit. Ik meen te moeten constateren, dat in de werken van de heren Bouman en Van Zelm de wiskundige exactheid geheel afwezig is, en ik kan dan ook niet erkennen, dat den schrijvers enige mathematisch-wijsgerige verdienste zou toekomen, daar de wijsbegeerte der wiskunde de wiskunde zelf vóóronderstelt.

Waar de schrijvers zich juist op hun wiskundig-wijsgerige ver-

diensten laten voorstaan en mij zelf hebben voorgesteld, hun werk met dat van Wijdenes te vergelijken, meen ik verplicht te zijn dit voor hen onaangenaam oordeel met de meeste beslistheid uit te spreken. Hun werk dringt immers, zoals ik reeds opmerkte, door in kringen, waar wetenschappelijk-wiskundige en wiskundig-wijsgerige litteratuur overigens geen toegang vindt, en het kan naar mijn vaste overtuiging in die kringen niet anders dan misverstand vestigen omtrent de mathesis en haar grondslagen. Het boekje — ik bedoel de „Rekenkundige Denkbaarheden" — is des te gevaarlijker, waar het wordt ingeleid door een waarderende brief van niemand minder dan wijlen Professor Bolland. Wie in wijsgerig Nederland enigszins thuis is, weet, dat de wiskunde de sterke zijde van onzen groten denker niet was, weet óók, dat hij er bij tijd en wijle behagen in vond, zijn ambtgenoten in 't zonnetje te zetten, en is dus niet geneigd, de betekenis van die brief te overschatten. Maar mag men verwachten, dat de kwekeling met acte te Drouwermond, die in de werken van de heren Bouman en Van Zelm voorlichting zoekt bij zijn onderwijs in het rekenen, thuis is in wijsgerig Nederland?

Samenvattend moet ik de beide beschouwde werkjes van de heren Bouman en Van Zelm — „De Rekenkundige Denkbaarheden in Logischen Samenhang" en „Algebraïsche Getallen en Grootheden" [1]) — qualificeren als volstrekt onbevredigend uit wiskundig en uit mathematisch-wijsgerig gezichtspunt en als hoogst gevaarlijke lectuur voor ieder, wien een gerijpt mathematisch onderscheidingsvermogen ontbreekt, hoe groot overigens zijn wetenschappelijke eruditie, hoe vurig zijn ijver, hoe oprecht zijn streven naar inzicht ook mogen zijn.

Evert Beth.

Voor hen, die Jg. XIII niet bezitten, wordt hier korrel nr. XIII herhaald.

XIII. Proeven van wiskundige exactheid, ontleend aan: „De Rekenkundige Denkbaarheden in Logischen Samenhang met — als proeve van toegepaste logica — een rekenmethode voor de lagere school" door P. J. BOUMAN en J. C. VAN ZELM, tweede druk, Amsterdam 1922.

„Wie teller denkt, denkt de ontkenning en tegenstelling van den noemer. De teller, die ontkenning is van den noemer, wordt niettemin

---

[1]) Dit laatste maakt deel uit van: P. J. Bouman en J. C. van Zelm, „Toelichting bij het Nieuwe Dertiende B", Amsterdam-Batavia-Paramaribo z.j.

genóémd en de noemer, die geen teller wil zijn, is niettemin uitkomst van telbaarheid, 't geen wil zeggen, dat het noemen het tellen en het tellen het noemen uiteraard en van zelf medebrengt."

„Verhouding is de denkbaarheid, waarop het in telbaarheid en berekenbaarheid uitloopt. Verhouding is een naam voor het onberekenbare Eene, wijl het een alomvattende denkbaarheid is. Want wie zegt, dat alles verhouding is of zich in verhouding laat denken, geeft daarmee te kennen, dat niets onvoorwaardelijk stand houdt. In het onberekenbare Eene verhoudt zich alles."

„In de machtsverheffing denkt men het getal als wortel van zijn macht, en is de macht, als uitkomst der machtsverheffing, getal. Is nu de wortel van een willekeurig getal steeds een getal? Inzooverre „een" getal zich verheft tot macht, is de wortel der macht getal. En inzooverre „een" getal geen uitkomst is eener machtsverheffing, is de wortel van dat getal géén getal. Het denken komt zoo tot de gedachte van getallen, die geen getallen zijn, de z.g. onmeetbare getallen (b.v. $\sqrt{3}$)."

Wie van de lezers van Euclides ziet kans, in het bovenstaande een redelijke, wiskundige betekenis te ontdekken? Welke denkbeelden moet de lectuur van een dergelijk boek bij den argelozen lezer verwekken! In het licht van dergelijke „voorlichting" worden de hardnekkige en verspreide misverstanden ten aanzien van karakter en betekenis van het wiskundig denken wellicht enigszins begrijpelijk.

E. W. Beth.

BOEKBESPREKING.

Dr H. J. E. BETH en Dr P. J. VAN LOO, *Mechanica voor het M.O. met vraagstukken.* Vierde onveranderde druk. P. Noordhoff N.V., Groningen—Batavia 1940. 203 bldz., *f* 2,50.

De eerste druk van dit leerboek verscheen in 1933. Voordien was het treurig gesteld met de kwaliteit van de vaderlandse schoolboeken over de mechanica. Het aankweken van een zekere mate van virtuositeit in het oplossen van vraagstukken was en is nog bij menigeen een met ijver nagestreefd doel Critische bezinning op de betekenis van de in de mechanica optredende begrippen wordt daarbij als een hinderlijke bijkomstigheid beschouwd, waaraan slechts weinig tijd mag worden verspild. Dergelijke opvattingen hebben bij niet-wiskundigen twijfel doen ontstaan aangaande de waarde van het onderwijs in de exacte vakken. Of inderdaad de veelgeroemde „vorming van de geest" door een in laatste instantie louter machinale bezigheid zo zeer wordt gediend, is op zijn minst genomen voor bestrijding vatbaar en kan moeilijk als deugdelijk argument gebruikt worden door hen die menen, dat de belangrijke positie van de mechanica in het programma van essentiele betekenis is voor het onderwijs.

In eigen kring is de reactie gelukkig niet uitgebleven. De scherpe critiek van de heer Schogt in dit tijdschrift [1]) op de voornaamste der gebruikelijke leerboeken bracht duidelijk aan het licht op welk een ontstellend laag peil sommige van deze boeken stonden en als het geoorloofd zou zijn de hoedanigheid van het onderwijs af te meten naar de deugdelijkheid van de daarbij gebruikte leerboeken, dan zou het oordeel daarover weinig vleiend moeten zijn.

Deze critiek heeft positieve vormen aangenomen in het bekende leerboek [2]) van de heer Schogt. Door de strenge opzet en het consequent vasthouden aan een ietwat stugge wetenschappelijke terminologie, zonder daarnaast een meer aanschouwelijk woordgebruik te tolereren, staan de didactische kwaliteiten van dit boek achter bij de wetenschappelijke. Voor hen, die wel met de heer Schogt konden meegaan, bestond daarom behoefte aan een compromis tussen de door hem aangevallen opvattingen en de daarvoor in de plaats gestelde verbeteringen.

Dit compromis hebben de heren Beth en Van Loo weten te vinden. Een vierde druk van hun boek na zes jaar is een aanwijzing dat men

---

[1]) Bijvoegsel van het Nw. Tijdschr. v. Wiskunde, **2** (1926), p. 54.

[2]) Schogt, J. H. *Beginselen der theoretische mechanica* (Groningen 1926, 1927).

in steeds ruimere kring gaat begrijpen, dat het mechanicaonderwijs meer behoort te zijn dan een „sommenuurtje”. Hiermee is niet gezegd, dat deze opvatting reeds gemeengoed is geworden. Blijkens een statistiekje over de verbreiding van het leerboek van Beth en Van Loo naast die van het klassieke voorbeeld van ouderwetse en tevens slechte leerboeken, het boek van Ir Van Drooge, behoort het laatstgenoemde boek nog tot de verreweg meest gebruikte. De voorstanders van de afschaffing van de mechanica als zelfstandig leervak hebben het dus voorlopig nog niet moeilijk met het zoeken naar argumenten!

De opvolgende drukken van het boven aangekondigde leerboek zijn niet alle aan elkaar gelijk. Vooral de derde druk is ingrijpend gewijzigd, maar de vierde is geheel gelijk aan de derde. De derde druk is in dit tijdschrift nog niet besproken, zodat er aanleiding is om het boek nog eens weer aan een beschouwing te onderwerpen.

Het boek begint met een wiskundige inleiding over het rekenen met vectoren en de differentiaalrekening. Dit laatste onderdeel is summier behandeld; de schrijvers wilden blijkbaar slechts een soort compendium geven, hetgeen in verband met de wijziging in het leerplan volkomen verantwoord is. Ik vind het jammer, dat de notatie van Leibniz gebruikt is. Om redenen, die ik elders[3]) uitvoerig uiteengezet heb, zou ik de voorkeur geven aan de accentennotatie en bij de differentiatie naar de tijd, de fluxienotatie. Juist in de mechanica bezit deze laatste notatie grote voordelen boven die van Leibniz.

Het tweede hoofdstuk behandelt uitvoerig en correct de kinematica van het stoffelijk punt, waarbij gebruik gemaakt wordt van de in het eerste hoofdstuk besproken hulpmiddelen.

In de meeste leerboeken is de grondlegging van de dynamica het zwakke punt. De moderne axiomatica van de dynamica gebruikt naast de kinematische begrippen slechts één nieuw grondbegrip, het begrip massa. Het begrip kracht wordt dan door middel van een definitie ingevoerd. De introductie van deze axiomatica bij het middelbaar onderwijs stuit op bezwaren. De schrijvers hebben een minder abstracte wijze van behandeling gegeven, waarbij het krachtbegrip onder de grondbegrippen is opgenomen. Ik vind dit gedeelte van het boek uitstekend geslaagd. Minder goed vind ik § 38, waar sprake is van de gedwongen beweging van een stoffelijk punt. Het is niet erg duidelijk wat precies verstaan moet worden onder de „invloed”, die een stoffelijk punt ondervindt van een vlak bijvoorbeeld, want in de axioma's is slechts sprake van de beïnvloeding van stoffelijke punten onderling. De schrijvers hadden dunkt mij hier uitvoerig moeten spreken over het „vrij maken” van de beweging door het aanbrengen van hulpkrachten, althans vectoren met de eigenschappen van krachten, die ten doel hebben de meetkundige beperking van de beweging in rekening te brengen, zodat het massapunt als een vrij punt beschouwd kan worden, waarop een systeem van krachten werkt. Daarop zijn dan de beschouwingen van de voorafgaande paragraaf ten volle van toepassing.

---

[3]) Euclides **16**, p. 197.

Aansluitend op het derde hoofdstuk wordt in het vierde de theorie van arbeid en arbeidsvermogen besproken.

Het vijfde hoofdstuk behandelt de statica van het stoffelijk punt. In § 51 wordt vermeld, dat een punt, waarop een systeem van krachten werkt met vectorsom nul, in rust is of een eenparige rechtlijnige beweging heeft ten opzichte van een vast assenstelsel. Deze bewering is juist. Maar tussen haakjes staat de toevoeging: § 34, Ax. 1. Deze motivering is naar mijn mening fout. Op p. 61 wordt n.l. gezegd, dat men spreekt van een stofflijk punt onttrokken aan de invloed van andere punten, wanneer men daarbij die punten op grote afstand van het beschouwde punt verwijderd denkt. Is echter de vectorsom van enige op een punt werkende krachten nul, dan behoeven de punten, die het optreden van die krachten ten gevolge hebben, niet op grote afstanden te zijn. Een beroep op axioma I alleen gaat in dit geval niet op; de uitgesproken bewering steunt op alle axioma's. Men behoort hier te zeggen, dat de totale versnelling gelijk is aan nul, hetgeen uit de grondformule $\Sigma \underline{k} = m \underline{a}$ volgt. Wanneer nu *gedurende een zeker tijdvak* de resulterende kracht $\Sigma \underline{k}$ gelijk aan nul blijft, dan is alleen de eenparig rechtlijnige beweging mogelijk, omdat de differentiaalvergelijking $\underline{a} = 0$ geen andere oplossingen heeft dan $\underline{r} = \underline{v}t + \underline{r}_0$, waarin $\underline{v}$ en $\underline{r}_0$ constante vectoren zijn.

De beide volgende hoofdstukken behandelen de dynamica van het stoffelijk punt. De theorie wordt afgesloten met kenmerken van stabiliteit en labiliteit van evenwicht. Hierover zou ik een kleine opmerking willen maken. Het evenwicht van een stoffelijk punt wordt stabiel genoemd in § 76, als het een weinig buiten de plaats van evenwicht aan zich zelf overgelaten, zich in de richting van de evenwichtsstand gaat bewegen. In plaats van de woorden „een weinig" zou ik willen schrijven „voldoend weinig". Het woord „weinig" heeft feitelijk geen wiskundige betekenis, terwijl met „voldoend weinig" wordt aangegeven, dat er een positief getal δ bestaat met de eigenschap, dat de beweging in de richting van de evenwichtsstand zal geschieden, zodra de afstand van het punt tot zijn evenwichtsstand kleiner is dan δ.

Hoofdstuk VIII bevat een eenvoudig gehouden behandeling van de botsing. De auteurs willen deze leerstof blijkbaar facultatief stellen, omdat dit hoofdstuk in kleine letter gezet is.

In Hoofdsuk IX komen de krachtstelsels, die op een vast lichaam werken, aan de orde. Daar de schrijvers blijkbaar van mening zijn — en mijns inziens terecht — dat de dynamica van het vaste lichaam op de school gemist kan worden, zijn zij genoodzaakt als een nieuw axioma het feit te vermelden, dat uitwerking van een kracht op een vast lichaam niet verandert, als men het aangrijpingspunt langs de drager verplaatst. Ik betreur het, dat dit axioma zo vaag is geformuleerd. Men kan bijvoorbeeld vragen naar de verdeling van de inwendige krachten, en die ondergaat wel degelijk een wijziging, hoewel alle inwendige krachten tezamen aequivalent met nul blijven. Het zou aanbeveling verdienen hier nauwkeurig aan te geven, dat in de snelheidsverdeling en de verandering daarvan met de tijd, geen wijziging gebracht wordt. Immers het zijn de afgeleiden naar de tijd van impulsgrootheden, die door de in het axioma vermelde wijzi-

ging onberoerd blijven. Overigens is de behandeling van de theorie in dit hoofdstuk zeer elegant. In de slotparagrafen wordt iets meegedeeld over het arbeidsvermogen van een vast lichaam. Over dit onderwerp had ik gaarne enige eenvoudige vraagstukken gezien.

Het tiende en laatste hoofdstuk is gewijd aan de statica van het vaste lichaam.

Het boek wordt met herhalingsopgaven besloten.

Hoewel hier en daar aanmerkingen gemaakt kunnen worden en de schrijvers naar mijn smaak een enkele maal iets te tolerant zijn wat nauwkeurig woordgebruik betreft, wil ik toch als mijn overtuiging uitspreken, dat we in het boek van Beth en Van Loo een zeer waardevol hulpmiddel bezitten voor het onderwijs in de mechanica. Het boek munt uit door de beknopte en duidelijke uiteenzetting van de leerstof in een aangenaam leesbare vorm, terwijl ook het zorgvuldig uitgekozen oefenmateriaal vermelding verdient. Het is te hopen, dat steeds meer docenten dit uitstekende boek bij hun lessen zullen gebruiken. J. C. H. Gerretsen.

TWEE NIEUWE LEERBOEKEN DER REKEN- EN STELKUNDE.

Dr JOH. A. WANSINK, *Reken- en Stelkunde voor het middelbaar en voorbereidend hoger onderwijs.* Groningen—Batavia, J. B. Wolters' U.M.
Deel I, 1939; 205 bldz., *f* 2,10 (geb. *f* 2,40).
Deel II, 1940; 205 bldz., *f* 2,25 (geb. *f* 2,60).

Dr P. G. J. VREDENDUIN en Dr A. VAN HASELEN, *Algebra (inclusief rekenkunde) voor V.H. en M.O.* Arnhem, Uitgeverij „Rijnstad".
Algebra I, 1940; 131 bldz., *f* 1,90 (gecartonneerd).
„ II, 1940; 123 bldz., *f* 2,25 („).

De verschijning van schoolboeken over wiskunde, die nieuw zijn, in den zin van niet eerder verschenen, is een alledaagsch verschijnsel. Zeldzamer is de gebeurtenis, dat een boek het licht ziet, hetwelk aanzienlijk van zijne voorgangers afwijkt. Nu er vrijwel gelijktijdig twee leerboeken der reken- en stelkunde verschenen zijn, die, elk op zijne wijze, eene zelfde grondgedachte trachten in praktijk te brengen, is het de moeite waard, aan deze boeken eenige aandacht te wijden.

In groote trekken kan men de ontwikkeling van ons algebra-onderwijs gedurende de laatste jaren als volgt kenschetsen: eerst stond de techniek van het maken van vraagstukken geheel op den voorgrond, en werd eenigszins gesteund door fragmentarische aanteekeningen van theoretischen aard; later verschenen boeken, die eene samenhangende theorie gaven, terwijl de toepassingen op den voorgrond bleven. Naarmate de theorie het karakter van hulpmiddel voor de vraagstukkentechniek verloor, onderging zij enkele wijzigingen, zooals b.v. duidelijk blijkt uit de behandelingswijze van de complexe

getallen. Dat bovendien eenige wijziging in de leerstof optrad (graphieken en infinitesimaalrekening, afschaffing van de onbepaalde vergelijkingen) lijkt mij een afzonderlijk verschijnsel.

Deze ontwikkeling vindt eene, althans voorloopige, afsluiting in eene leerwijze, waarbij de theorie op den voorgrond treedt, en de vraagstukken toepassingen der theorie zijn. Bij deze manier van behandeling groepeert de leerstof zich als het ware om de verschillende stadia in de ontwikkeling van het getalbegrip: het rekenen met natuurlijke getallen, dat met geheele, met rationale, met reëele en met complexe getallen worden achtereenvolgens behandeld. Telkens worden de eigenschappen van een getallengebied onderzocht en daarna worden problemen behandeld, die in dat getallengebied kunnen worden opgelost. Dit brengt mede, dat de gekunstelde verdeeling der leerstof over twee vakken, algebra en rekenkunde, wordt opgeheven. De mate van gestrengheid en exactheid, waarmede dit alles wordt uitgewerkt, blijft willekeurig.

Het schrijven van een leerboek, dat op nieuwe denkbeelden berust, is breken met, in dit geval reeds verzwakte, traditie. Daarbij doet zich de gelegenheid voor, ook op ondergeschikte punten de wenschelijkheid van handhaven of terzijdestellen der traditie te onderzoeken. Vooral op het gebied van nomenclatuur en notatie is heel wat, dat de toets eener redelijke critiek niet kan doorstaan.

Wanneer men vergelijkenderwijze nagaat, op welke wijze de schrijvers van bovengenoemde leerboeken de taak hebben volbracht, die zij zich gesteld hadden, valt het oog op twee belangrijke verschilpunten, ten eerste de uitvoerigheid en ten tweede de nomenclatuur en notatie. Dr Wansink geeft de bewijzen der behandelde theoriestellingen voluit, Dr Vredenduin en Dr Van Haselen behandelen telkens eenige stellingen met de bewijzen, terwijl daarna andere stellingen, vooral z.g. afgeleide eigenschappen, in theorievragen zijn verwerkt. (Ik stel mij voor, dat de gebruikers van het boek de leerlingen een afzonderlijk schrift laten aanleggen voor de beantwoording der theorievragen). Ook behandelt Dr Wansink allerlei bijkomstigheden, welke men in het werk van de heeren V. en v. H. niet aantreft. Dr Vredenduin en Dr Van Haselen sluiten zich wat betreft nomenclatuur en notatie vrijwel volkomen bij de traditie aan, ook waar deze mijns inziens zeer aanvechtbaar is; Dr Wansink daarentegen toont zich een voorstander van taaldifferentiatie en notatievernieuwing, hij maakt b.v. onderscheid tusschen ongelijkheden en ongelijkheidsopgaven, en gebruikt ter aanduiding daarvan verschillende teekens ($<$ en $<\cdot$), ook voert hij een afzonderlijk teeken voor vergelijkingen in ($\doteq$).[1])

Als gevolg van de overeenstemming in leidende gedachte zijn de punten van overeenkomst talrijker en van meer belang dan de punten van onderscheid. Beide boeken maken den indruk, voortbrengselen

---

[1]) Natuurlijk is dit eene globale opmerking, en zijn er uitzonderingen. Zoo handhaaft Dr Wansink den dwazen term „onnauwkeurige getallen", terwijl de heeren V. en v. H. de juiste benaming „benaderende getallen" gebruiken.

te zijn van ernstige overdenking; zij zijn met ernst en nauwgezetheid geschreven, en zullen zeker belangstelling vinden bij degenen, die het met de grondgedachte der methode eens zijn. Aan welk van de twee men de voorkeur geeft, hangt er in hoofdzaak van af, of men meer voelt voor eene breede behandeling dan wel voor eene beknopte, of men aan het traditioneele gehecht is, dan wel er vrij van staat. Met belangstelling wacht ik af, of deze beide werken de waardeering zullen vinden, waarop zij naar mijne meening recht hebben.

J. H. S.

EGMONT COLERUS, *Van punt naar vierde dimensie;* meetkunde voor iedereen. Nederlandsche bewerking van Dr J. A. A. Verlinden. Bilthoven, „De Gemeenschap", 1939, 298 bldz., *f* 3,25.

Dit boek behandelt onderwerpen uit de meetkunde op populaire wijze. De prijzenswaardige bedoeling is, de meetkunde nader tot het ontwikkelde leekenpubliek te brengen, en de vooroordeelen te bestrijden, die in breede kringen tegen de wiskunde bestaan. De schrijver en de bewerker pogen dit doel te bereiken, door hunne onderwerpen in een aangenamen causeriestijl te behandelen, zonder aan de duidelijkheid te kort te doen. De eischen, die aan strengheid en exactheid gesteld worden, zijn uit den aard der zaak hoogst bescheiden.

Er wordt in dit boek veel besproken: euclidische en niet-euclidische, twee-, drie- en meerdimensionale, projectieve en metrische meetkunde, zoowel op synthetisch-axiomatische als op analytische wijze behandeld; veel wordt bewezen, en veel zonder bewijs vermeld. Wat gezegd wordt, lijkt mij voor het overgroote deel juist, al stuit men hier en daar op bedenkelijke beweringen of slordigheden (zooals de uitspraak, dat de standaardwerken der klassieken ons *vrijwel allemaal* op een of andere wijze zijn overgeleverd; en zooals de naam Renée Descartes), en enkelen keer ontmoet men geheel foutieve redeneeringen (het bewijs der stelling, dat eene raaklijn aan een cirkel loodrecht staat op den straal naar het raakpunt, bldz. 137—138). De behandelde onderwerpen zijn alle elementair in wetenschappelijken zin, maar geenszins alle elementair uit een oogpunt van didaktiek beschouwd; zoo wordt het axiomastelsel van Hilbert vrij uitvoerig besproken.

Aan een boek als dit, dat niet als leerboek bedoeld is, maar slechts ten doel heeft, belangstelling te wekken, moet men andere eischen stellen, dan aan een gewoon studieboek. Is het geschikt, zijne taak te vervullen? Dit is voor den wiskundige niet gemakkelijk te beantwoorden, hij moet trachten zich op het standpunt van den wiskundig niet geschoolden lezer te stellen. Ik heb getracht dit te doen, en ben tot de conclusie gekomen, dat de lezer, die met zeer weinig voorkennis begint, het boek ondanks den gemoedelijken stijl wel zeer moeilijk zal vinden. Voor zulke lezers is het aantal onderwerpen, dat even wordt aangeraakt, veel te groot, en het verband tusschen de vele zeer eenvoudige gedeelten veel te los. Beter geschikt is het boek voor lezers, die de middelbare school doorloopen hebben, en wat

meer over meetkunde willen weten, al zullen deze lezers er menig onderwerp in vinden, dat hun reeds lang bekend is. Het schijnt mij toe, dat het boek het meeste nut kan stichten, als het door een belangstellende gelezen wordt onder deskundige leiding, of als het — geheel of bij gedeelten — gebruikt wordt als grondslag voor populaire voordrachten, b.v. aan eene volksuniversiteit. Wie (zooals het voorbericht zegt) een meetkundeboek wil lezen op dezelfde wijze, waarop men een roman leest, komt bedrogen uit. J. H. S.

Dr. FRED. SCHUH en Ir W. J. VOLLEWENS, *Nieuw leerboek der mechanica ten dienste van het voorbereidend hoger en het middelbaar onderwijs.* 's-Gravenhage—Batavia, G. B. van Goor Zonen's Uitgeversmaatschappij N.V., 1940. 229 bladz., prijs *f* 2,50 (ing.), *f* 2,90 (gec.).

Dit werk gelijkt in opzet, volgorde der behandelde onderwerpen en schrijftrant zooveel op het Leerboek der Mechanica voor het M.O. door Prof. Dr Fred. Schuh en B. J. van Trotsenburg (Leiden, Sijthoff, 1937) dat men het als eene verkorte en eenigszins vereenvoudigde bewerking ervan kan beschouwen. Ik zou dus naar de bespreking van dat werk kunnen verwijzen [1]), maar wil toch aan dit nieuwe leerboek gaarne eenige regels wijden. Want juist doordat het aanmerkelijk beknopter is, en van een zoodanigen omvang, dat het in den beschikbaren tijd kan worden doorgewerkt, mist het het eenige nadeel, dat zijn voorganger had, namelijk de te groote uitgebreidheid.

De schrijvers hebben niet te sterken nadruk gelegd op de wiskundige fundeering. In het bijzonder de limietovergangen zijn zeer sober behandeld, zoowel in de gevallen waar zij tot groote moeilijkheden aanleiding geven (massageometrie, berekening van arbeid), als in die, waarin zij binnen het bereik der leerlingen liggen (vectorlimieten, stellingen als $\lim (\underline{a} + \underline{b}) = \lim \underline{a} + \lim \underline{b}$). Overigens is de wiskundige zoowel als de mechanische theorie correct behandeld. — Uit didaktisch oogpunt bijzonder geslaagd lijkt mij de behandeling der vraagstukken, waarbij glijdende wrijving optreedt. De schrijvers stellen op den voorgrond, dat men behandeling moet beginnen met het maken eener onderstelling, welke achteraf onjuist blijken kan, in welk geval men opnieuw moet beginnen. — Terecht vermijden de schrijvers de invoering van het moment eener kracht t.o.v. een vlak. Dit begrip treedt in de gebruikelijke leerboeken op om den weg tot de theorie der zwaartepunten te effenen; de krachten, waaraan de momenten worden toegekend, zijn krachten werkende op een vast lichaam, dat zijn glijdende vectoren, en een glijdende vector heeft geen bepaald aangrijpingspunt [2]), en daarmede ook geen bepaald moment t.o.v. een vlak. De beteekenis van dit nieuwe leerboek ligt naar mijne

---

[1]) Euclides XIII, bldz. 226—228.

[2]) Dat de schrijvers somtijds (b.v. bldz. 197 en 201) aan glijdende vectoren een aangrijpingspunt toekennen, acht ik dan ook minder gelukkig. Evenzoo § 195—197.

meening in de behandeling der samenstelling van krachten, werkende op een vast lichaam. Gelijk men weet treden in de vergelijkingen, die de beweging van een vast lichaam onder den invloed van een gegeven krachtenstelsel bepalen, slechts op de vectorsom van het stelsel en de momenten om drie assen. Een gevolg hiervan is, dat krachtenstelsels, die in deze grootheden overeenstemmen, aan een zelfde lichaam dezelfde beweging geven (bij gelijke initiaaltoestanden). Daarom noemt men zulke stelsels aequivalent. De bepaling van de beweging van een vast lichaam onder de werking van een gegeven stelsel krachten is een vraagstuk, dat buiten het bereik van het M.O. ligt, maar de herleiding van krachtenstelsels tot daarmee gelijkwaardige wordt ijverig beoefend. In de onderwijspractijk is dus van een mechanisch onderwerp eene zuiver wiskundige theorie afgesplitst, en deze wordt dienstbaar gemaakt aan het vraagstukkenbedrijf. Zoo wordt een gedeelte van den voor het vak mechanica uitgetrokken tijd aan wiskundige oefeningen besteed. Maar de theorie, die aan deze oefeningen ten grondslag gelegd wordt, geniet eene slechte behandeling. De benoodigde stellingen worden op hoogst ingewikkelde wijze afgeleid, en de resultaten zijn dikwijls niet algemeen. In het boek van de heeren Schuh en Vollewens vindt men eene behandeling, die véél eenvoudiger, algemeener en vollediger is. Het is te hopen, dat dit gedeelte van hun werk de aandacht der leeraren zal weten te trekken.

Van de vele verbeteringen, die dit boek brengt, zijn er enkele reeds een veertiental jaren geleden aanbevolen door een leeraar, die toen tot de jongeren gerekend werd. Zijne, mogelijk wat overmoedige, poging heeft niet veel succes gehad. Nu worden de voorstellen tot verbetering van het mechanica-onderwijs gedaan door mannen van grooter gezag, zij omvatten een grooter deel der leerstof, en zijn gegoten in een vorm, die waarschijnlijk voor practisch gebruik geschikt zal blijken. Moge thans eindelijk de vurig verbeide verbetering van ons mechanica-onderwijs een feit worden. J. H. S.

GONIOMETRISCHE FUNCTIES GEKARAKTERISEERD DOOR EEN FUNCTIONAALBETREKKING

DOOR

J. G. VAN DER CORPUT.

§ 1. *Inleiding.*

In dit tijdschrift heeft Dr. J. C. H. GERRETSEN [1]) de volgende interessante stelling bewezen:

Als de voor iedere bestaanbare x gedefinieerde bestaanbare functies $f(x)$ en $g(x)$ aan de functionaalbetrekking

$$f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$$

voldoen en als bovendien

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} = 1 \tag{1}$$

is, dan is $f(x) = \cos x$ en $g(x) = \sin x$.

Zooals ik in § 2 zal laten zien, blijft zijn redeneering bijna onveranderd gelden, als (1) vervangen wordt door de veel minder eischende voorwaarde

$$\lim_{\substack{x>0 \\ x \to 0}} g(x) = 0 \tag{2}$$

en vinden we op die manier: *voldoen de voor iedere bestaanbare x gedefinieerde bestaanbare functies $f(x)$ en $g(x)$ aan de genoemde functionaalbetrekking en geldt bovendien* (2), *dan is $f(x) = g(x) = 0$ of $f(x) = \cos kx$ en $g(x) = \sin kx$, waarin k onafhankelijk van x is.*

Het is duidelijk, dat deze paren functies de genoemde functionaalvergelijking vervullen en dat zoowel voor de functie $g(x)$ die identiek nul is als voor de functie $g(x) = \sin kx$ betrekking (2) geldt.

Daarbij bleek mij alras, dat zelfs voorwaarde (2) door een conditie, die nòg minder eischt, kan worden vervangen en ik heb me toen het volgende probleem gesteld: gevraagd alle voor iedere bestaanbare x gedefinieerde bestaanbare functieparen

---

1) De karakteriseering van de goniometrische functies door middel van een functionaalbetrekking, Euclides **16** (1939), 92—99.

$f(x)$ en $g(x)$, voor welke de functionaalbetrekking geldt en gevraagd wordt verder een zoo weinig mogelijk eischende supplementaire voorwaarde, opdat $f(x) = \cos kx$ en $g(x) = \sin kx$ de eenige oplossing zij.

Zij gegeven, dat $f(x)$ en $g(x)$ bestaanbare voor iedere reëele x gedefinieerde functies voorstellen, die aan de functionaalbetrekking voldoen. Het rechterlid van die betrekking verandert niet, als x en y verwisseld worden, zoodat $f(x-y) = f(y-x)$ is en $f(x)$ dus een even functie van x aangeeft. Is een der twee functies constant, dan is dat ook met de andere het geval, want is $f(x)$ constant, dan is $g(x)\,g(y)$, dus $g(x)$ constant, en is $g(x)$ constant, dan volgt uit de functionaalbetrekking, met $-y$ in plaats van y toegepast, $f(x-y) = f(x+y)$, zoodat $f(x)$ constant is. Is dus een der twee functies $f(x)$ en $g(x)$ constant, dan is $g(x) = \mathrm{F}$ en $g(x) = \mathrm{G}$, waarin de constanten F en G de betrekking $\mathrm{F} = \mathrm{F}^2 + \mathrm{G}^2$ vervullen. We kunnen ons derhalve verder beperken tot het geval, dat niet beide, dus geen van beide der twee functies $f(x)$ en $g(x)$ constant zijn. De vraag, die we ons nu stellen, is deze: zijn $f(x) = \cos kx$ en $g(x) = \sin kx$ de eenige niet-constante oplossingen van de functionaalbetrekking? Bij den huidigen stand van de wetenschap hangt de beantwoording van die vraag af van de omstandigheid, of de beantwoorder het keuze-axioma aanvaardt of niet. Over dit keuze-postulaat zal ik verderop uitvoeriger spreken, maar ik zal eerst mededeelen, wat we betreffende ons probleem te weten kunnen komen zonder toepassing van dat axioma.

Gemakkelijk bewijst men (zooals in § 2 zal geschieden) voor elk paar niet-constante functies, die de functionaalvergelijking vervullen, de formule

$$f^2(x) + g^2(x) = 1; \tag{3}$$

d.w.z. het punt P met de coördinaten $f(x)$ en $g(x)$ ligt op den eenheidscirkel, dus op den cirkel met den oorsprong tot middelpunt en met de lengte-eenheid tot straal.

Ik voer nu de volgende eigenschap in.

Eerste pathologische eigenschap: *Ik zeg, dat een functiepaar $f(x)$ en $g(x)$, waarvoor steeds* (3) *geldt, de eerste pathologische eigenschap bezit, als bij elk punt P_0 op den eenheidscirkel in elk interval minstens één x gevonden kan worden, zoodanig dat het op den eenheidscirkel gelegen punt P met de coördinaten $f(x)$ en $g(x)$ net zoo dicht bij P_0 ligt als men dat zelf wenscht,* m.a.w. als men bij elk paar bestaanbare getallen F en G met $\mathrm{F}^2 + \mathrm{G}^2 = 1$ en bij elk positief

getal ε in elk interval minstens één getal x kan bepalen met

$$| f(x) - F | < \varepsilon \text{ en } | g(x) - G | < \varepsilon.$$

We zullen in § 3 laten zien, dat de paren $f(x) = \cos kx$, $g(x) = \sin kx$ de eenige niet-constante functieparen zijn, die de functionaalbetrekking vervullen en die de eerste pathologische eigenschap niet bezitten. Nu is het heel gemakkelijk een supplementaire conditie in te voeren, waardoor de functieparen met de eerste pathologische eigenschap buitengesloten worden, bijv. de voorwaarde, dat er een interval te vinden is, waarbinnen de schommeling van de functie $g(x)$ kleiner is dan 2, of de conditie dat er een interval te vinden is, waarbinnen $f(x)$ een schommeling < 2 vertoont, of de voorwaarde, dat er een interval te vinden is, zoodanig dat voor elk tweetal tot dat interval behoorende punten x_1 en x_2 de som

$$(f(x_1) - f(x_2))^2 + (g(x_1) - g(x_2))^2$$

kleiner is dan een constante < 4, of de conditie dat bij geschikt gekozen x_0 de grenswaarde

$$(4) \qquad \lim_{\substack{x > x_0 \\ x \to x_0}} g(x)$$

bestaat, enz. We vinden dus o.a.: *voldoen de twee niet-constante voor iedere bestaanbare x gedefinieerde functies $f(x)$ en $g(x)$ aan de functionaalbetrekking en is het mogelijk een getal x_0 te vinden, zoodanig dat de in* (4) *genoemde grenswaarde bestaat, dan is $f(x) = \cos kx$ en $g(x) = \sin kx$, waarin k onafhankelijk van x is.*

Maar nu de vraag: hoe is het, als we functieparen met de eerste pathologische eigenschap wèl toelaten? In de tegenwoordige phase der wiskunde kan die vraag alleen beantwoord worden met gebruikmaking van het door Zermelo ingevoerde keuze-axioma, dat als volgt luidt: *Zijn een aantal niet-lege verzamelingen gegeven, dan bestaat er een keuze-voorschrift, d.w.z. een voorschrift, dat in elk dier verzamelingen één en slechts één element aanwijst.* De bedoeling is dus, dat er één enkel voorschrift bestaat, dat ons in staat stelt uit iedere verzameling een vertegenwoordiger te kiezen.

De intuitionist verwerpt dit postulaat, omdat het genoemde voorschrift niet constructief kan worden aangegeven, maar ook de niet-intuitionist zal, waar mogelijk, dit axioma vermijden, omdat niet bewezen is, dat dit postulaat met de overigen vereenigbaar is. De geldigheid van het axioma is evident, als slechts een eindig aantal verzamelingen beschouwd worden en in elk dier verzame-

lingen een bepaald element kan worden aangewezen; het bedoelde voorschrift bestaat dan slechts uit de vermelding van de aldus aangewezen elementen. De moeilijkheid begint pas, als we met oneindig veel verzamelingen te doen hebben. Waar voor mij echter bij dit probleem geen andere weg openstaat, zal ik in § 4 met behulp van het keuze-axioma alle oplossingen van de functionaalbetrekking bepalen en op die manier zal ik, behalve de paren $f(x) = \cos kx$ en $g(x) = \sin kx$ nog oneindig veel andere niet-constante oplossingen vinden; zooals vanzelf spreekt, bezitten die dan allemaal de eerste pathologische eigenschap.

§ 2. *Over het bewijs van Dr. J. C. H. Gerretsen.*

Stel $f(x)$ en $g(x)$ zijn twee voor iedere bestaanbare x gedefinieerde bestaanbare niet-constante functies, waarvoor de genoemde functionaalbetrekking geldt. Omdat het rechterlid van die betrekking niet verandert, als x en y verwisseld worden, vindt men $f(x-y) = f(y-x)$, zoodat $f(x)$ een even functie van x is.

Was $g(x)$ ook een even functie van x, dan leverde de functionaalbetrekking, met $-y$ in plaats van y toegepast, de relatie $f(x-y) = f(x+y)$, zoodat $f(x)$ constant zou zijn, hetgeen we buitengesloten hebben. Dus $g(x)$ is niet een even functie.

Vervangt men in de functionaalbetrekking x door $-x$ en y door $-y$, dan krijgt men

$$g(-x)g(-y) = g(x)g(y), \tag{5}$$

in het bijzonder

$$g^2(-x) = g^2(x), \text{ dus } g(-x) = \pm g(x).$$

Omdat $g(x)$ niet constant is, kunnen we een y met $g(y) \neq 0$ vinden. Was $g(-y) = g(y)$, dan zou uit (5) volgen, dat $g(x)$ een even functie is, hetgeen niet het geval is. Dus $g(-y) = -g(y)$, zoodat $g(x)$ blijkens (5) een oneven functie van x is. In het bijzonder volgt daaruit dat $g(0)$ de waarde nul bezit. Voor $y = 0$ levert de functionaalbetrekking dus $f(x) = f(x)f(0)$, dus (omdat $f(x)$ niet voortdurend nul is) $f(0) = 1$. De functionaalbetrekking, met $y = x$ toegepast, geeft nu

$$1 = f^2(x) + g^2(x). \tag{6}$$

De resultaten van het bovenstaande gedeelte, dat vrijwel onveranderd uit het bewijs van Dr. GERRETSEN overgenomen is, afgezien van een korte passage, waarin deze, geheel onnoodig, betrekking (1) benut, zullen in de volgende paragraaf toegepast

worden, maar nu zal ik verder in deze paragraaf de geldigheid van betrekking (2) aannemen.

Vervangt men in de functionaalbetrekking x door $\frac{x}{2}$ en y door $-\frac{x}{2}$, dan vindt men in verband met (6)

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} - \left(-\frac{x}{2}\right)\right) = f^2\left(\frac{x}{2}\right) - g^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - 2g^2\left(\frac{x}{2}\right) \to 1$$

als het positieve getal x tot nul nadert. De even functie $f(x)$ nadert dus ook tot 1, als x van den negatieven kant tot nul nadert.

Uit de functionaalbetrekking blijkt nu, dat $f(x-y)$ tot $f(x)$ nadert, als y tot nul nadert, zoodat $f(x)$ overal continu is. Kiezen we y zoo, dat $g(y) \neq 0$ is, dan vinden we, dat

$$g(x) = \frac{f(x-y) - f(x)\,f(y)}{g(y)}$$

dus ook overal een continue functie van x is.

Dit alles is nog aan het artikel van Dr. GERRETSEN ontleend, maar verder ga ik anders te werk.

Vervangt men in de functionaalbetrekking y door $-y$, dan krijgt men na aftrekking

$$f(x+y) - f(x-y) = -2g(x)g(y).$$

Ik kies nu een willekeurig positief getal x en verder een getal λ, dat op willekeurige wijze onbegrensd aangroeit. Bovenstaande formule levert

$$f\left(\frac{hx}{\lambda}\right) - f\left(\frac{(h-1)x}{\lambda}\right) = -2g\left(\frac{x}{2\lambda}\right) g\left(\frac{(h-\frac{1}{2})x}{\lambda}\right)$$

voor alle natuurlijke getallen $h \leqq \mathrm{H}$, waarbij H het grootste geheele getal $\leqq \lambda$ voorstelt en optelling geeft

$$(7) \qquad f\left(\frac{\mathrm{H}x}{\lambda}\right) - f(0) = -\frac{g\left(\frac{x}{2\lambda}\right)}{\frac{x}{2\lambda}} \sum_{h=1}^{H} \frac{x}{\lambda}\, g\left(\frac{(h-\frac{1}{2})x}{\lambda}\right).$$

Groeit λ onbegrensd aan, dan nadert $\frac{\mathrm{H}x}{\lambda}$ tot x, dus $f\left(\frac{\mathrm{H}x}{\lambda}\right)$ tot $f(x)$. De som

$$(8) \qquad \sum_{h=1}^{H} \frac{x}{\lambda}\, g\left(\frac{(h-\frac{1}{2})x}{\lambda}\right) + \left(x - \frac{\mathrm{H}x}{\lambda}\right) g(x)$$

is de Riemann-som, die men verkrijgt, door in het interval $(0, x)$

de deelpunten $\frac{hx}{\lambda}$ aan te brengen ($h = 1, 2, \ldots, H$), door in elk der aldus verkregen deelintervallen een punt te interpoleeren (n.l. het punt x in het laatste deelinterval en het midden $\frac{(h-\frac{1}{2})x}{\lambda}$ in de andere), door de lengte van elk deelinterval te vermenigvuldigen met de waarde, die de functie g in het geinterpoleerde punt aanneemt en dan ten slotte alle op die manier gevonden produkten op te tellen. Omdat $g(x)$ continu is, nadert de Riemann-som dus bij onbegrensd aangroeiende λ tot de Riemann-integraal

$$\mathrm{I} = \int_0^x g(u)du.$$

De laatste term van (8) nadert tot nul, omdat $x - \frac{Hx}{\lambda}$ tot nul nadert. De in (7) optredende som nadert derhalve tot I, als λ onbegrensd aangroeit.

Beschouwen we nu voor een oogenblik een waarde van x, waarvoor $\mathrm{I} \neq 0$ is (een zoodanige x bestaat, omdat $g(u)$ niet voor iedere positieve u nul is). Uit (7) blijkt dan, dat

$$\frac{g\left(\frac{x}{2\lambda}\right)}{\frac{x}{2\lambda}}$$

tot de limiet $k = -\frac{f(x) - f(0)}{\mathrm{I}}$ nadert, als λ op willekeurige wijze onbegrensd aangroeit. Indien dus het positieve getal δ op willekeurige manier tot nul nadert, nadert $\frac{g(\delta)}{\delta}$ tot k, zoodat k onafhankelijk van x is. Groeit λ onbegrensd aan, dan levert formule (7) dus

$$f(x) - f(0) = -k\int_0^x g(u)du$$

voor alle positieve x (ook voor die, waarbij de laatste integraal nul is).

Deze formule is evident voor $x = 0$ en ook geldig voor negatieve x, omdat f een even en g een oneven functie is.

Uit de continuiteit der functie $g(u)$ blijkt thans, dat $f(x)$ differentieerbaar is en dat overal

$$f'(x) = -k\,g(x)$$

is.

Nu gaat de redeneering van deze paragraaf verder vanzelf. De beschouwing van Dr. GERRETSEN op pag. 96 geeft

$$g'(x) = k\,f(x)$$

en die van de bladzijden 98 en 99 leert ons, dat $f(x) = \cos kx$ en $g(x) = \sin kx$ de eenige oplossingen zijn.

§ 3. *Beschouwingen zonder het keuze-axioma.*

Zijn $f(x)$ en $g(x)$ twee voor iedere bestaanbare x gedefinieerde bestaanbare niet-constante functies, die aan de functionaalbetrekking voldoen, dan geldt, zooals we in § 2 gezien hebben, betrekking (6). Aan elk bestaanbaar getal x kan men dus een bestaanbaar getal $\xi = \varphi(x)$ toevoegen met

$$\cos \xi = f(x) \text{ en } \sin \xi = g(x);$$

daarbij is $\varphi(x)$ op een veelvoud van 2π na eenduidig bepaald. Omdat $f(x)$ een even en $g(x)$ een oneven functie van x is, is

(9) $$\varphi(-x) \equiv -\varphi(x) \pmod{2\pi}.$$

Is $\eta = \varphi(y)$, dus

$$\cos \eta = f(y) \text{ en } \sin \eta = g(y),$$

dan is blijkens de functionaalbetrekking

$$f(x-y) = \cos\xi\cos\eta + \sin\xi\sin\eta = \cos(\xi-\eta)$$
$$= \cos(\varphi(x) - \varphi(y)),$$

zoodat

(10) $$\varphi(x-y) \equiv \pm(\varphi(x) - \varphi(y)) \pmod{2\pi}$$

is. Ik beweer, dat steeds de congruentie

(11) $$\varphi(x-y) \equiv \varphi(x) - \varphi(y) \pmod{2\pi}$$

geldt, want stel er waren twee bestaanbare getallen x en y met

(12) $$\varphi(x-y) \equiv -\varphi(x) + \varphi(y) \text{ en } 2\varphi(x) \not\equiv 2\varphi(y) \pmod{2\pi}$$

te vinden. Vervangt men in (10) y door $x-y$, dus $x-y$ door y, dan vindt men

$$\varphi(y) \equiv \pm(\varphi(x) - \varphi(x-y)) \equiv \pm(2\varphi(x) - \varphi(y)) \pmod{2\pi}$$

wegens (12); hieruit zou, in verband met de tweede der betrekkingen (12) volgen $2\varphi(x) \equiv 0 \pmod{2\pi}$; vervangt men verder in (10) x door $x-y$ en y door $-y$, dus $x-y$ door x, dan krijgt men

$$\varphi(x) \equiv \pm(\varphi(x-y) - \varphi(-y)) \equiv \pm(-\varphi(x) + 2\varphi(y)) \pmod{2\pi}$$

wegens (12) en (9). Dit zou opleveren $2\varphi(x) \equiv 2\varphi(y)$ of $2\varphi(y) \equiv 0$

(mod 2π) en elk dezer twee congruenties is in strijd met $2\varphi(x) \equiv 0$ (mod 2π) en de laatste betrekking (12). Hiermede is formule (11) aangetoond.

Vervangt men in die formule y door $-y$, dan vindt men in verband met (9)

$$\varphi(x+y) \equiv \varphi(x) + \varphi(y) \quad (\text{mod. } 2\pi);$$

ik zal dit noemen de additieve congruentie. Het is duidelijk, dat de functie

$$\varphi(x) \equiv kx \quad (\text{mod. } 2\pi)$$

aan deze congruentie voldoet, maar de vraag is nu of deze congruentie ook nog andere oplossingen bezit.

Alvorens dit probleem, dat op zichzelf niet oninteressant is, te behandelen, zal ik eerst de analoge vraag beantwoorden, die betrekking heeft op de vergelijking

$$\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y);$$

ik noem dit de additieve vergelijking. Daartoe voer ik een tweede eigenschap in.

Tweede pathologische eigenschap: *Ik zeg, dat een voor iedere bestaanbare x gedefinieerde bestaanbare functie $\Phi(x)$ de tweede pathologische eigenschap bezit, als ze in ieder interval, hoe klein ook, iedere reeële waarde willekeurig dicht benadert,* d.w.z. als bij elk positief getal ε en bij ieder bestaanbaar getal γ in elk interval minstens één x met

$$|\Phi(x) - \gamma| < \varepsilon \tag{13}$$

te vinden is.

Ik ga nu bewijzen: *Elke voor iedere bestaanbare x gedefinieerde bestaanbare functie $\Phi(x)$, die aan de additieve vergelijking voldoet en de tweede pathologische eigenschap niet bezit, heeft de gedaante kx, waarin k onafhankelijk van x is.*

De additieve vergelijking, met $x+y$ in plaats van x en met $-y$ in plaats van y, dus met x in plaats van $x+y$ toegepast, leert

$$\Phi(-y) = \Phi(x) - \Phi(x+y) = -\Phi(y),$$

zoodat $\Phi(x)$ een oneven functie van x is. De additieve vergelijking leert ons tevens dat de relatie

$$\Phi(rx) = r\,\Phi(x) \tag{14}$$

geldt voor elk natuurlijk getal r, dus voor elk positief rationaal

getal r, derhalve, van wege het oneven karakter der functie Φ, ook voor elk rationaal getal r.

Zij M de verzameling der bestaanbare getallen γ, waaraan bij ieder positief getal ε een bestaanbaar getal x met $|x| < \varepsilon$ en (13) kan worden toegevoegd. Wegens $\Phi(0) = 0$ behoort het punt $\gamma = 0$ tot M. Ik onderscheid twee verschillende gevallen.

1. Stel M bevat alleen het punt $\gamma = 0$. Was $\Phi(x)$ in de omgeving van den oorsprong onbegrensd, dan zou men x zoo tot nul kunnen laten naderen, dat $|\Phi(x)|$ onbegrensd aangroeit; stelt dan N het grootste geheele getal $\leqq \Phi(x)$ voor, dan zou

$$\Phi\left(\frac{x}{N}\right) = \frac{1}{N}\Phi(x)$$

tot 1 naderen, in strijd met de veronderstelling, dat 1 niet tot M behoort. Dus $\Phi(x)$ is in de omgeving van den oorsprong begrensd. Was die functie in den oorsprong discontinu, dan zou men x zóó tot nul kunnen laten naderen, dat $\Phi(x)$ tot een eindige limiet $\neq 0$ nadert, maar dat is buitengesloten, omdat de verzameling M alleen het punt $\gamma = 0$ bevat. Dus $\Phi(x)$ is in den oorsprong continu. Uit de additieve vergelijking blijkt nu, dat $\Phi(x)$ overal continu is.

Uit (14) volgt, als $\Phi(1) = k$ gesteld wordt,

$$\Phi(x) = kx$$

voor iedere rationale x en wegens de continuiteit geldt deze relatie dan voor iedere bestaanbare x.

2. Stel M bevat minstens één punt $\gamma \neq 0$. Ik beweer, dat M dan elk bestaanbaar getal ζ bevat. Om dat te bewijzen, kies ik een willekeurig positief getal ε en een rationaal getal $r \neq 0$ met $|r\gamma - \zeta| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Omdat γ tot M behoort, bestaat er een reëel getal x_1 met

$$|x_1| < \frac{\varepsilon}{|r|} \text{ en } |\Phi(x_1) - \gamma| < \frac{\varepsilon}{2|r|},$$

zoodat het getal $x = x_1 r$ absoluut kleiner dan ε is en wegens (14) de betrekkingen

$$|\Phi(x) - \zeta| = |r\Phi(x_1) - \zeta| \leqq |r|\,|\Phi(x_1) - \gamma| + |r\gamma - \zeta| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

vervult, zoodat ζ tot M behoort. In dit geval bevat M dus alle bestaanbare getallen, zoodat $\Phi(x)$ in iedere omgeving van den oorsprong iedere reëele waarde willekeurig dicht benadert. Het is duidelijk, dat $\Phi(x)$ dan de tweede pathologische eigenschap bezit, d.w.z. in elk interval iedere bestaanbare waarde γ willekeurig

dicht benadert; immers kiest men in dat interval een willekeurige x, dan kan men volgens het bovenstaande een y vinden, zóó dat $x + y$ in het beschouwde interval gelegen is en $\Phi(y)$ het getal $\gamma - \Phi(x)$ willekeurig dicht benadert; volgens de additieve eigenschap benadert van $\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y)$ het getal γ willekeurig dicht.

Hiermede is het gevraagde bewijs geleverd.

Thans gaan we op analoge manier de additieve congruentie behandelen.

Derde pathologische eigenschap. *Ik zeg, dat een voor iedere bestaanbare x gedefinieerde bestaanbare functie $\varphi(x)$ de derde pathologische eigenschap bezit, als ze in ieder interval, hoe klein ook, iedere reëele waarde modulo 2π willekeurig dicht benadert,* d.w.z. als bij elk positief getal ε en bij ieder bestaanbaar getal γ in elk interval minstens één x te vinden is, die bij geschikt gekozen geheele h aan de ongelijkheid

$$(15) \qquad | \varphi(x) - \gamma - 2h\pi | < \varepsilon$$

voldoet.

Het zal den lezer niet verwonderen, dat ik thans ga aantoonen: *een voor iedere bestaanbare x gedefinieerde bestaanbare functie $\varphi(x)$, die aan de additieve congruentie voldoet en de derde pathologische eigenschap niet bezit, vervult de congruentie*

$$(16) \qquad \varphi(x) \equiv kx \pmod{2\pi},$$

waarin k onafhankelijk van x is.

Uit de additieve congruentie volgt

$$(17) \qquad \varphi(0) \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2\pi).$$

Zij M* de verzameling der bestaanbare getallen γ waaraan men bij ieder positief getal ε een bestaanbaar getal x en een geheel getal h met $|x| < \varepsilon$ en (15) kan toevoegen. Uit (17) blijkt, dat M* alle veelvouden van 2π bevat. Ik onderscheid wederom twee verschillende gevallen.

1. Stel M* bevat alleen de veelvouden van 2π. In dit geval kan ik op twee verschillende manieren te werk gaan. Vooreerst kan ik door $f(x) = \cos \varphi(x)$ en $g(x) = \sin \varphi(x)$ te stellen teruggaan tot de in de voorgaande paragraaf behandelde functionaalbetrekking en omdat $g(x)$ in dit geval in de oorsprong continu is, is, zooals we in § 2 gezien hebben, $f(x) = \cos kx$ en $g(x) = \sin kx$, waaruit (16) volgt.